ZUR ČECHSCHEN COHOMOLOGIETHEORIE PARAKOMPAKTER RÄUME

von

Hans-Günther Weidner

aus Lichtenfels

1967

1968 № 12

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535725_0079

ZUR ČECHSCHEN COHOMOLOGIETHEORIE PARAKOMPAKTER RÄUME

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Hans-Günther Weidner
aus Lichtenfels

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	29. Nov. 1967
Dekan:	Professor Dr. W. Haupt
Erstberichterstatter:	Professor Dr. G. Nöbeling
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. H. Bauer

INHALT

Einleitung 1

§ 1 Lokalendliche Überdeckungen 3

§ 2 Čechsche Cohomologietheorie 8

§ 3 Der Komplex X_∞ 16

§ 4 Ein Isomorphiesatz 2o

§ 5 Die Cohomologie H^*_∞ 36

Literatur 45

EINLEITUNG

Eine gewisse Schwierigkeit bei der Berechnung der Čechschen Cohomologiegruppen eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe besteht darin: bereits für jede offene Überdeckung von X sind die Cohomologiegruppen des zugehörigen Nerven zu bestimmen, dann erst ist es möglich, über alle offenen Überdeckungen von X zum direkten Limes überzugehen. Der Grund hierfür liegt in der üblicherweise nicht streng genug gefaßten Verfeinerungsrelation für Überdeckungen: diese Relation zeichnet nämlich im allgemeinen keine Abbildung der offenen Mengen der Verfeinerung in die offenen Mengen der gröberen Überdeckung aus.

G. Nöbeling hat in [4] für einen kompakten Raum X ein im System aller offenen Überdeckungen von X kofinales Teilsystem angegeben und darin eine verschärfte Verfeinerungsrelation eingeführt, die eine solche "kanonische" Zuordnung gewährleistet. Dadurch wird es möglich, nun schon bei den Cozyklen- bzw. Corandgruppen der Nerven zum direkten Limes und dann erst durch Division zu den Cohomologiegruppen überzugehen, d.h. die bisher notwendige Reihenfolge der Operationen umzukehren. Dabei wird entscheidend die Kompaktheit des zugrundeliegenden Raums, also die Möglichkeit, mit endlichen Überdeckungen zu arbeiten, ausgenützt.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, daß es auch für parakompakte Räume zulässig ist, nach Einführung eines speziellen kofinalen Überdeckungssystems die Bildung direkter Limiten und den Übergang zur Cohomologie zu vertauschen. Eine zentrale Rolle spielt dabei ein Isomorphiesatz (Satz 4.1), dessen Beweis ohne globale Endlichkeitsvoraussetzungen für die betrachteten Überdeckungen neue Überlegungen erforderte. (§ 4).- Im einzelnen gliedert sich die Niederschrift wie folgt: In § 1 werden grundlegende Definitionen und einfache Sätze über spezielle Überdeckungen des Grundraums aus [4] auf parakompakte Räume übertragen. § 2 bringt in knapper Darstellung bekannte Ergebnisse der Čechschen Cohomologietheorie und setzt diese in Beziehung zu den in § 1 eingeführten Spezialisierungen. In § 3 konstruieren wir einen dem parakompakten

Raum X in eindeutiger Weise zugeordneten simplizialen Komplex X_∞ und zeigen schließlich in § 4 bzw. § 5, daß die Čechschen Gruppen von X zwar nicht den Cohomologiegruppen des Komplexes X_∞ direkt, wohl aber den in einer bestimmten (in § 5 näher erläuterten) Weise modifizierten Cohomologiegruppen von X_∞ isomorph sind.

Wir erhalten dabei insbesondere das Resultat: Die als direkte Limiten definierten Čechschen Cohomologiegruppen können für parakompakte Räume sogar aus einem algebraischen Cokettenkomplex gewonnen werden.

Die genannten Ergebnisse lassen sich allgemein für Koeffizienten in einem R-Modul - R bezeichnet einen Ring mit Eins - sowie für die relative Cohomologie eines parakompakten Raums nach einem abgeschlossenen Teilraum beweisen, was im folgenden stets geschehen wird.

Herrn Professor Dr. G. Nöbeling möchte ich meinen Dank aussprechen für seine Anregungen und Ratschläge zu dieser Arbeit, gleichzeitig aber auch für die langjährige Förderung, die mir durch ihn zuteil wurde. - Ferner danke ich an dieser Stelle allen, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen.

§ 1 Lokalendliche Überdeckungen.

X sei ein parakompakter Raum, d.h. X sei Hausdorffsch und zu jeder offenen Überdeckung von X existiere eine lokalendliche Verfeinerung. Bezeichnet man mit Cov(X) das System aller offenen Überdeckungen von X, so besagt die Eigenschaft der Parakompaktheit neben der Gültigkeit des 2. Trennungsaxioms: Das Teilsystem aller lokalendlichen offenen Überdeckungen von X ist kofinal in Cov(X).- Überdeckungen von X werden im folgenden stets als offen vorausgesetzt, selbst, wenn dies nicht immer ausdrücklich vermerkt ist. In gleicher Weise sind mit Umgebungen eines Punktes aus X stets offene Umgebungen gemeint.

1.1 Definition:*) Co(X) sei das System aller offenen Überdeckungen von X, das folgenden Bedingungen genügt: $\alpha = \{U_i\}_{i\in I} \in Co(X)$ genau dann, wenn gilt:

(1.1) α ist lokalendlich;

(1.2) für $U_i, U_k \in \alpha$ mit $U_i \cap U_k \neq \emptyset$ ist $U_i \cap U_k \in \alpha$.

In Co(X) erklären wir eine verschärfte Verfeinerungsrelation:

1.2 Definition: Sind $\alpha, \beta \in Co(X)$, $\beta = \{V_j\}_{j\in J}$, so heiße β "wesentlich feiner" als α, symbolisch: $\alpha \ll \beta$, wenn gilt:

(1.3) β ist Verfeinerung von α: $\alpha < \beta$;

(1.4) für $U_i \in \alpha$, $V_j \in \beta$ mit $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ gilt: $U_i \cap V_j \in \beta$.

Bemerkungen: (1) Die Relation $\ll$ ist grundsätzlich auch für

---

*) Die Definitionen und Sätze dieses Paragraphen wurden zuerst von G. Nöbeling in [4] für kompakte Räume ausgesprochen. -

beliebige offene Überdeckungen von X erklärbar. Die später benötigte Refexivität dieser Relation setzt allerdings die Eigenschaft (1.2) voraus; daher wurde $\ll$ sinnvollerweise von vornherein nur für Elemente aus Co(X) definiert.

(2) Wir vereinbaren folgende Schreibweise:

$\beta \gg \alpha$ genau dann, wenn $\alpha \ll \beta$.

Das System Co(X) ist kofinal in Cov(X) bezüglich der Relation $<$ und kofinal im System aller lokalendlichen Überdeckungen von X bezüglich der Relation $\ll$:

1.3 Satz. (a) Zu jeder offenen Überdeckung α von X existiert eine Verfeinerung $\beta \in Co(X)$.

(b) Zu jeder lokalendlichen offenen Überdeckung α von X existiert eine wesentliche Verfeinerung $\beta \in Co(X)$.

Beweis: (a) Wegen der Parakompaktheit von X existiert zu α eine lokalendliche Verfeinerung β'; in dieser können nur jeweils endlich viele verschiedene Mengen einen nichtleeren Durchschnitt haben. Nimmt man in die Überdeckung β' diese Durchschnitte mit auf, so erhält man eine Überdeckung β, die wegen der Lokalendlichkeit von β' ihrerseits lokalendlich ist und offenbar der Bedingung (1.2) genügt, dh. es ist $\beta \in Co(X)$ mit $\alpha < \beta$.

(b) Ist α selbst schon lokalendlich, so kann die unter (a) beschriebene Konstruktion unmittelbar auf α angewandt werden; die resultierende Überdeckung $\beta \in Co(X)$ hat dann trivialerweise die Eigenschaft (1.4), dh. $\alpha \ll \beta$.

1.4 Satz. Co(X) ist bezüglich der Relation $\ll$ ein gerichtetes System.

Beweis: (i) Es gilt $\alpha \ll \alpha$ für alle $\alpha \in Co(X)$ wegen (1.2).

(ii) Ist $\alpha \ll \beta \ll \gamma$, $\gamma = \{W_k\}_{k\in K} \in Co(X)$, so gilt $\alpha \ll \gamma$:
$\alpha < \gamma$ ist unmittelbar klar; sei nun $U_i \in \alpha$, $W_k \in \gamma$, $U_i \cap W_k \neq \emptyset$; wegen $\beta < \gamma$ existiert ein $V_j \in \beta$ mit $W_k \subseteq V_j$; es ist $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, nach (1.4) gilt also $U_i \cap V_j \in \beta$. Wegen $\beta \ll \gamma$ folgt:
$U_i \cap W_k = (U_i \cap V_j) \cap W_k \in \gamma$.

(iii) Für $\alpha, \beta \in Co(X)$ ist die Existenz einer gemeinsamen wesentlichen Verfeinerung $\gamma \in Co(X)$ zu zeigen:
Man setzt $\gamma := \{W_{ij} = W_{ji} := U_i \cap V_j \mid U_i \in \alpha,\ V_j \in \beta\}$;
γ ist lokalendlich: Es gibt zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$, die mit nur endlich vielen $U_i \in \alpha$ und nur endlich vielen $V_j \in \beta$ einen nichtleeren Durchschnitt hat; also schneidet $U(x)$ auch nur endlich viele $W_{ij} \in \gamma$.
γ ist durchschnitts-abgeschlossen wegen

$$W_{ij} \cap W_{kl} = (U_i \cap U_k) \cap (V_j \cap V_l) \in \gamma;$$

somit: $\gamma \in Co(X)$. - Ist $U_k \in \alpha$, $W_{ij} \in \gamma$, $U_k \cap W_{ij} \neq \emptyset$, so gilt: $U_k \cap W_{ij} = (U_k \cap U_i) \cap V_j \in \gamma$;
wegen $\alpha < \gamma$ folgt $\alpha \ll \gamma$. Ganz analog zeigt man $\beta \ll \gamma$.-

Seien nun $\alpha, \beta \in Co(X)$, $\alpha \ll \beta$. Ist V_j eine beliebige Menge aus β, so existieren wegen der Lokalendlichkeit von α nur endlich viele $U_i \in \alpha$ mit $V_j \subseteq U_i$; wegen (1.2) ist es daher sinnvoll, von der "kleinsten Menge in α" zu sprechen, die V_j umfaßt; diese werde mit $p_\alpha^\beta(V_j)$ bezeichnet:

(1.5) $$p_\alpha^\beta(V_j) := \bigcap_{\substack{U_i \in \alpha \\ V_j \subseteq U_i}} U_i \ .$$

Dadurch ist eine eindeutig bestimmte Zuordnung

(1.6) $$p_\alpha^\beta : \beta \longrightarrow \alpha$$

erklärt.

1.5 Satz. Es gilt:

(1.7) $p_{\alpha}^{\alpha} = id$ für $\alpha \in Co(X)$;

(1.8) $p_{\alpha}^{\beta} \cdot p_{\beta}^{\gamma} = p_{\alpha}^{\gamma}$ für $\alpha \ll \beta \ll \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in Co(X)$.

Beweis: Die Beziehung (1.7) gilt trivialerweise.

Zum Beweis von (1.8) seien für $W_k \in \gamma$:

$$V_j := p_{\beta}^{\gamma}(W_k), \qquad U_{i_j} := p_{\alpha}^{\beta}(V_j), \qquad U_{i_k} := p_{\alpha}^{\gamma}(W_k).$$

Dann gilt: $W_k \subseteq V_j$ und $W_k \subseteq U_{i_k}$, also $W_k \subseteq U_{i_k} \cap V_j \in \beta$ wegen (1.4); aus der Definition von V_j folgt nun: $V_j \subseteq U_{i_k} \cap V_j$, dh. $V_j \subseteq U_{i_k}$, was $U_{i_j} \subseteq U_{i_k}$ nach sich zieht. - Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus $W_k \subseteq V_j \subseteq U_{i_j}$; somit: $U_{i_j} = U_{i_k}$.

Bemerkung: Die Verschärfung (1.4) der üblichen Verfeinerungsrelation für Überdeckungen dient dazu, die Aussage (1.8) zu sichern.

Zum Abschluß dieses Paragraphen führen wir folgende Schreibweise ein:

Ist $M \neq \emptyset$ eine beliebige Teilmenge von X und $\alpha \in Co(X)$, so bezeichnen wir mit U_M die kleinste Menge aus α, die M enthält - falls eine solche Menge existiert - :

(1.9) $$U_M := \bigcap_{\substack{U_i \in \alpha \\ M \subseteq U_i}} U_i .$$

Es ist klar, daß für $\alpha \ll \beta$, $V_j \in \beta$, die in (1.5) definierte Menge $p_{\alpha}^{\beta}(V_j)$ im Sinne der eben eingeführten Notation einfach auch als U_{V_j} geschrieben werden könnte:

(1.10) $$p_{\alpha}^{\beta}(V_j) = U_{V_j} .$$

Wir wollen jedoch im Hinblick auf spätere Anwendungen für offene Mengen einer wesentlichen Verfeinerung β von α weiterhin die Bezeichnung (1.5) beibehalten, (1.9) in allen übrigen Fällen verwenden. - Insbesondere ist also für jedes $x \in X$ die Menge $U_{\{x\}}$ erklärt - wir schreiben kurz U_x.

Wir beweisen:

1.6 Lemma. Für $\alpha, \beta \in Co(X)$ mit $\alpha \ll \beta$ und $x \in X$ gilt:

$$p_\alpha^\beta(V_x) = U_x.$$

Beweis: Wegen $x \in V_x \subseteq p_\alpha^\beta(V_x) \in \alpha$ folgt sofort: $U_x \subseteq p_\alpha^\beta(V_x)$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion beachte man: $x \in U_x$, $x \in V_x$, also $x \in U_x \cap V_x \in \beta$; somit: $V_x \subseteq U_x \cap V_x \subseteq U_x \in \alpha$, woraus sich $p_\alpha^\beta(V_x) \subseteq U_x$ ergibt.

§ 2 Čechsche Cohomologietheorie.

Wir stellen hier kurz die wichtigsten Definitionen und Sätze der Čechschen Cohomologietheorie nach [1] zusammen.

(X,A) sei ein Paar aus der Kategorie von Paaren topologischer Räume und ihrer stetigen Abbildungen.

$\alpha = \{U_i\}_{(I,I_A)}$, wo I eine Indexmenge bezeichnet mit $I_A \subseteq I$, heißt Überdeckung von (X,A), wenn:

(2.1) $\{U_i\}_{i\in I}$ Überdeckung von X ist;

(2.2) für die ausgezeichnete Teilmenge $I_A \subseteq I$ gilt: $A \subseteq \bigcup_{i\in I_A} U_i$.

Das System aller offenen Überdeckungen von (X,A) werde mit Cov(X,A) bezeichnet.

Sei $\alpha \in Cov(X,A)$; ein (q+1)-Tupel

$$s_\alpha^q := (U_{i_0},\ldots,U_{i_q}) \qquad (q \geq 0)$$

von offenen Mengen aus α heißt q-Simplex mit den Ecken U_{i_ν} ($i_\nu \in I$, $\nu = 0,\ldots,q$). Der Durchschnitt

$$tr(s_\alpha^q) := U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$$

wird Träger des q-Simplexes s_α^q genannt.

Die Gesamtheit aller s_α^q mit nichtleerem Träger - q durchläuft die natürlichen Zahlen einschließlich Null - werde mit X_α bezeichnet; X_α ist ein simplizialer Komplex. Unter A_α verstehen wir den Teilkomplex von X_α, bestehend aus allen Simplexen $s_\alpha^q = (U_{i_0},\ldots,U_{i_q}) \in X_\alpha$, für die gilt:

(2.3) $$i_\nu \in I_A \qquad (\nu = 0,\ldots,q)$$

(2.4) $$tr(s_\alpha^q) \cap A \neq \emptyset .$$

Das simpliziale Paar (X_α, A_α) heißt der Nerv der Überdeckung α.

Für festes $q \geq 0$ führen wir noch folgende Bezeichnung ein:

(2.5) $$X_\alpha^q := \{ s_\alpha^q \mid s_\alpha^q \in X_\alpha \};$$

analog wird A_α^q definiert.

Ist G ein R-Modul über einem Ring R mit Einselement - für R = Z impliziert das den Fall einer abelschen Gruppe - so versteht man unter dem "q-ten Cohomologiemodul des Paares (X,A) bezüglich der Überdeckung α mit Koeffizienten in G" den q-ten Cohomologiemodul des simplizialen Paares (X_α, A_α) mit Koeffizienten in G : $H^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$. -

Eine Überdeckung $\beta = \{V_j\}_{(J,J_A)} \in \mathrm{Cov}(X,A)$ heißt Verfeinerung von $\alpha = \{U_i\}_{(I,I_A)} \in \mathrm{Cov}(X,A)$ - wir schreiben $\alpha < \beta$ - wenn es (mindestens) eine Abbildung

(2.6) $$p : (J,J_A) \longrightarrow (I,I_A)$$

der Indexmengen-Paare gibt, derart, daß

(2.7) $$V_j \subseteq U_{p(j)} \quad \text{für alle } j \in J.$$

Cov(X,A) wird durch diese Verfeinerungsrelation zu einer gerichteten Menge.

(2.6) mit der Eigenschaft (2.7) induziert eine simpliziale Abbildung

$$p : (X_\beta, A_\beta) \longrightarrow (X_\alpha, A_\alpha)$$

der entsprechenden Nerven, die wir "Projektion" nennen und ebenfalls mit p bezeichnen wollen. Man zeigt leicht:

(2.8) Die identische Abbildung

$$(X_\alpha, A_\alpha) \longrightarrow (X_\alpha, A_\alpha)$$

ist eine Projektion;

(2.9) für $\alpha < \beta < \gamma$ und eine Projektion

$$p' : (X_\gamma, A_\gamma) \longrightarrow (X_\beta, A_\beta)$$

ist auch die Komposition

$$p \cdot p' : (X_\gamma, A_\gamma) \longrightarrow (X_\alpha, A_\alpha)$$

eine Projektion.

Schließlich gilt:

(2.1o) Für $\alpha < \beta$ induzieren irgendzwei Projektionen

$$p\,,\ \tilde{p}\ :\ (X_\beta,A_\beta)\longrightarrow(X_\alpha,A_\alpha)$$

cokettenhomotope Abbildungen der entsprechenden Cokettenkomplexe, dh. p und $\tilde{p}$ bestimmen denselben Homomorphismus *) der zugehörigen Cohomologiemoduln; dieser ist somit unabhängig von der speziellen Wahl der Zuordnung p in (2.6) und allein durch die Relation $\alpha<\beta$ bestimmt - wir bezeichnen ihn daher mit $\check{\pi}^\alpha_\beta$:

$$(2.11)\qquad \check{\pi}^\alpha_\beta : H^q(X_\alpha,A_\alpha;G)\longrightarrow H^q(X_\beta,A_\beta;G)\ .$$

Aus (2.8) und (2.9) ergibt sich:

$$(2.12)\qquad \check{\pi}^\alpha_\alpha = \mathrm{id} \qquad \text{für } \alpha\in \mathrm{Cov}(X,A);$$

$$(2.13)\qquad \check{\pi}^\beta_\gamma\cdot\check{\pi}^\alpha_\beta = \check{\pi}^\alpha_\gamma \qquad \text{für } \alpha<\beta<\gamma\ ;\ \alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{Cov}(X,A)\ .$$

Es folgt: $\{H^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\check{\pi}^\alpha_\beta\}$ ist ein direktes System über der bezüglich $<$ gerichteten Menge $\mathrm{Cov}(X,A)$; sein direkter Limes heißt der q-te Čechsche Cohomologiemodul des Paares (X,A) mit Koeffizienten in G:

$$(2.14)\qquad \check{H}^q(X,A;G) := \varinjlim_{\substack{\mathrm{Cov}(X,A)\\ \alpha<\beta}} \{H^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\check{\pi}^\alpha_\beta\}.$$

Ist nun

$$f\ :\ (X,A)\longrightarrow(Y,B)$$

eine stetige Abbildung des Paares (X,A) in das Paar (Y,B), so wird durch f^{-1} eine Abbildung

$$f^{-1}\colon \mathrm{Cov}(Y,B)\longrightarrow \mathrm{Cov}(X,A)$$

definiert; für $\alpha\in\mathrm{Cov}(Y,B)$ sei $\alpha' := f^{-1}(\alpha)$; ist dann $\alpha<\beta$ in Cov(Y,B), so gilt $\alpha'<\beta'$ in Cov(X,A).

Jede Projektion

$$p\ :\ (Y_\beta,B_\beta)\longrightarrow(Y_\alpha,B_\alpha)$$

induziert eine Projektion

$$p'\colon (X_{\beta'},A_{\beta'})\longrightarrow(X_{\alpha'},A_{\alpha'})\ ,$$

derart, daß p und p' mit den durch f definierten simplizialen

*) Unter Homomorphismen verstehen wir stets Modulhomomorphismen.

Abbildungen

$$f_\alpha : (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \longrightarrow (Y_\alpha, B_\alpha)$$

$$f_\beta : (X_{\beta'}, A_{\beta'}) \longrightarrow (Y_\beta, B_\beta)$$

vertauschbar sind, dh. das Diagramm

(2.15)
$$\begin{array}{ccc} (X_{\beta'}, A_{\beta'}) & \xrightarrow{p'} & (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ (Y_\beta, B_\beta) & \xrightarrow{p} & (Y_\alpha, B_\alpha) \end{array}$$

kommutiert.

Geht man zur Cohomologie der Überdeckungen über, so folgt aus (2.15), daß auch die induzierten Homomorphismen ein kommutatives Diagramm

(2.16)
$$\begin{array}{ccc} H^q(X_{\beta'}, A_{\beta'}; G) & \xleftarrow{\pi^{\alpha'}_{\beta'}} & H^q(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}; G) \\ \uparrow{\scriptstyle f^*_\beta} & & \uparrow{\scriptstyle f^*_\alpha} \\ H^q(Y_\beta, B_\beta; G) & \xleftarrow{\pi^\alpha_\beta} & H^q(Y_\alpha, B_\alpha; G) \end{array}$$

liefern.

$\{f^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{Cov}(Y,B)}$ definiert also einen Homomorphismus

(2.17) $$\check{f}^*: \check{H}^q(Y,B;G) \longrightarrow \check{H}^q(X,A;G) \ ,$$

den "durch f induzierten Homomorphismus" der Cohomologiemoduln von Y und X. -

Schließlich erläutern wir noch kurz die Definition des dimensionserhöhenden Homomorphismus

(2.18) $$\check{\delta}^*: \check{H}^q(A;G) \longrightarrow \check{H}^{q+1}(X,A;G).$$

Zunächst hat man für jedes $\alpha \in \mathrm{Cov}(X,A)$ den aus der simplizialen Theorie bekannten Corandoperator

$$\delta^*_\alpha: H^q(A_\alpha;G) \longrightarrow H^{q+1}(X_\alpha, A_\alpha; G).$$

Für $\beta \in \mathrm{Cov}(X,A)$ mit $\alpha < \beta$ sind nun δ^*_α und δ^*_β mit den entsprechenden Projektionen π^α_β vertauschbar, dh. das System $\{\delta^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{Cov}(X,A)}$ ist ein Homomorphismus der direkten Systeme

$$\{\delta^*_\alpha\}: \{H^q(A_\alpha;G), \pi^\alpha_\beta\}_{\mathrm{Cov}(X,A)} \longrightarrow \{H^{q+1}(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\}_{\mathrm{Cov}(X,A)}$$

und definiert daher einen Homomorphismus δ^* der Limiten:

$$(2.19)\quad \delta^*: \varinjlim_{\substack{\mathrm{Cov}(X,A)\\ \alpha \prec \beta}} \{H^q(A_\alpha;G), \pi_\beta^\alpha\} \longrightarrow \varinjlim_{\substack{\mathrm{Cov}(X,A)\\ \alpha \prec \beta}} \{H^{q+1}(X_\alpha, A_\alpha;G), \pi_\beta^\alpha\}.$$

Die rechte Seite von (2.19) ist nach Definition der (q+1)-te Cohomologiemodul $\check{H}^{q+1}(X,A;G)$; die linke Seite kann nicht ohne weiteres mit $\check{H}^q(A;G)$ identifiziert werden, da hierzu der Limes über die gerichtete Menge $\mathrm{Cov}(A,\emptyset)$ zu nehmen ist. Man überlegt sich aber leicht, daß vermöge einer Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Cov}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Cov}(A,\emptyset),$$

die für $\alpha = \{U_i\}_{(I,I_A)} \in \mathrm{Cov}(X,A)$ durch

$$\varphi(\alpha) := \{U_i \cap A\}_{(I_A,\emptyset)} \in \mathrm{Cov}(A,\emptyset)$$

erklärt ist, eine Isomorphie

$$(2.2o)\quad \varinjlim_{\substack{\mathrm{Cov}(X,A)\\ \alpha \prec \beta}} \{H^q(A_\alpha;G), \pi_\beta^\alpha\} \cong \varinjlim_{\substack{\mathrm{Cov}(A,\emptyset)\\ \alpha \prec \beta}} \{H^q(A_\alpha;G), \pi_\beta^\alpha\} = \check{H}^q(A;G)$$

besteht.

Durch (2.19) und (2.2o) ist somit $\check{\delta}^*$ aus (2.18) wohldefiniert.

Mit (2.14), (2.17) und (2.18) sind die grundlegenden Forderungen für eine Cohomologietheorie erfüllt. Es läßt sich zeigen, daß die Čechschen Moduln $\check{H}^q(X,A;G)$, die induzierten Homomorphismen $\check{f}^*$ und der Corandoperator $\check{\delta}^*$ allen Eilenberg-Steenrodschen Axiomen für eine Cohomologietheorie genügen. -

Wir wenden uns nun parakompakten Räumen zu und betrachten Paare (X,A), wo A einen abgeschlossenen Teilraum des parakompakten Raums X bezeichnet - insbesondere ist also A selbst parakompakt. Es gilt:

2.1 Satz. (a) Man erhält die Cohomologiemoduln $\check{H}^q(X,A;G)$ des Paares (X,A) auch, wenn der Limes (2.14) über das System Co(X) - s. Def.1.1 - mit der verschärften Verfeinerungsrelation gebildet wird:

$$(2.21)\quad \check{H}^q(X,A;G) = \varinjlim_{\substack{\mathrm{Co}(X)\\ \alpha \ll \beta}} \{H^q(X_\alpha, A_\alpha;G), \pi_\beta^\alpha\}.$$

(b) Die Reduktion auf das System Co(X) mit der verschärften Verfeinerungsrelation ist verträglich mit stetigen Abbildungen.

Beweis: (a) Bezeichnen wir kurz mit $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}v(X,A)$ das System Cov(X,A) mit der Relation $<$, so ist zunächst eine Reduktion von $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}v(X,A)$ auf das System $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}v(X)$ möglich:

Ist $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$, $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$, und definiert man

$$I_A := \{\, i \mid i \in I,\ U_i \cap A \neq \emptyset \,\},$$

so ist $\widetilde{\alpha} := \{U_i\}_{(I,I_A)} \in \mathrm{Cov}(X,A)$. Da A abgeschlossen in X ist, gilt nach [1] IX.8:

$$\{\, \widetilde{\alpha} \mid \alpha \in \mathrm{Cov}(X) \,\} \text{ ist kofinal in } \mathrm{Cov}(X,A),$$

dh. man kann sich beim Übergang zum Limes (2.14) in der Tat auf das System $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}v(X)$ beschränken. Letzteres kann seinerseits auf $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}(X)$ reduziert werden, da nach Satz 1.3 (a) $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}(X)$ kofinal in $\underset{\sim}{\mathrm{Co}}v(X)$ ist. Es bleibt somit zu zeigen:

$$(2.22)\qquad \varprojlim_{\substack{\alpha<\beta \\ \mathrm{Co}(X)}} \{H^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\breve{\pi}^\alpha_\beta\} = \varprojlim_{\substack{\alpha\ll\beta \\ \mathrm{Co}(X)}} \{H^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\breve{\pi}^\alpha_\beta\}.$$

Wir gehen auf die Definition des direkten Limes zurück und erklären in

$$V := \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Co}(X)} H^q(X_\alpha,A_\alpha;G)$$

zwei Äquivalenzrelationen R und S wie folgt:

Für $h_\alpha \in H^q(X_\alpha,A_\alpha;G)$, $h_\beta \in H^q(X_\beta,A_\beta;G)$ gelte

(2.23) $h_\alpha \mathrel{\overset{}{\underset{R}{\sim}}} h_\beta$ genau dann, wenn ein $\gamma > \alpha,\beta$, $\gamma \in \mathrm{Co}(X)$ existiert mit: $\breve{\pi}^\alpha_\gamma(h_\alpha) = \breve{\pi}^\beta_\gamma(h_\beta)$;

(2.24) $h_\alpha \mathrel{\overset{}{\underset{S}{\sim}}} h_\beta$ genau dann, wenn ein $\delta \gg \alpha,\beta$, $\delta \in \mathrm{Co}(X)$ existiert mit: $\breve{\pi}^\alpha_\delta(h_\alpha) = \breve{\pi}^\beta_\delta(h_\beta)$.

Die linke Seite von (2.22) - ohne Modulstruktur - ist dann gleich V/R , die rechte Seite von (2.22) gleich V/S .

Wir behaupten: Es ist $h_\alpha \mathrel{\overset{}{\underset{R}{\sim}}} h_\beta$ genau dann, wenn $h_\alpha \mathrel{\overset{}{\underset{S}{\sim}}} h_\beta$:

Da $\alpha \ll \beta$ die Relation $\alpha < \beta$ impliziert, ist $S \to R$ trivial.

Sei umgekehrt $h_\alpha \mathfrak{R} h_\beta$, dh. es existiert ein $\gamma > \alpha,\beta$ mit

$$\pi^\alpha_\gamma(h_\alpha) = \pi^\beta_\gamma(h_\beta) ;$$

wir wählen $\delta \in Co(X)$ mit $\delta \gg \alpha,\beta,\gamma$; dann gilt nach (2.13):

$$\pi^\alpha_\delta(h_\alpha) = \pi^\gamma_\delta\pi^\alpha_\gamma(h_\alpha) = \pi^\gamma_\delta\pi^\beta_\gamma(h_\beta) = \pi^\beta_\delta(h_\beta) ,$$

also $h_\alpha \mathfrak{S} h_\beta$. Somit gilt $V/R = V/S$. - Die Übereinstimmung der algebraischen Struktur beider Seiten ist unmittelbar ersichtlich; (2.22) ist also richtig und damit ist die Aussage (a) bewiesen.

(b) Seien X und Y parakompakte Räume, A bzw. B je eine abgeschlossene Teilmenge in X bzw. Y und f eine stetige Abbildung

$$f : (X,A) \longrightarrow (Y,B).$$

Für $\alpha \in Co(Y)$ sei $\alpha' := f^{-1}(\alpha)$; wir behaupten: $\alpha' \in Co(X)$, denn:

(i) α' ist lokalendlich:

Sei $x \in X$, $y := f(x) \in Y$; wegen der Lokalendlichkeit von α existiert eine offene Umgebung W_y von y, die nur endlich viele $U_i \in \alpha$ schneidet; $f^{-1}(W_y)$ ist dann eine offene Umgebung von x, in die nur endlich viele Mengen aus α' eindringen: Angenommen, $f^{-1}(W_y) \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ für unendlich viele verschiedene $f^{-1}(U_i) \in \alpha'$; dann wäre

$$\emptyset \neq f(f^{-1}(W_y) \cap f^{-1}(U_i)) \subseteq ff^{-1}(W_y) \cap ff^{-1}(U_i) \subseteq W_y \cap U_i . \tag{2.25}$$

Da aus $f^{-1}(U_i) \neq f^{-1}(U_k)$ folgt: $U_i \neq U_k$, steht (2.25) im Widerspruch zur Wahl von W_y; also ist α' lokalendlich.

(ii) α' ist durchschnitts-abgeschlossen:

Seien $f^{-1}(U_i)$, $f^{-1}(U_k) \in \alpha'$ mit $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_k) \neq \emptyset$.

Wegen $$f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_k) = f^{-1}(U_i \cap U_k)$$

und $$ff^{-1}(U_i \cap U_k) \subseteq U_i \cap U_k$$

folgt $U_i \cap U_k \neq \emptyset$, somit $U_i \cap U_k \in \alpha$;

also ist $f^{-1}(U_i \cap U_k) = f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_k) \in \alpha'$.

Schließlich beweisen wir:

Gilt $\alpha \ll \beta$ für $\alpha, \beta \in Co(Y)$, so folgt: $\alpha' \ll \beta'$:

(i) $\alpha' < \beta'$ ist trivial;

(ii) Seien $f^{-1}(U_i) \in \alpha'$, $f^{-1}(V_j) \in \beta'$ mit $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$.
Wie auf S.14 unter (ii) schließt man $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, also
$U_i \cap V_j \in \beta$; folglich: $f^{-1}(U_i \cap V_j) = f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V_j) \in \beta'$.

Es ist also in der Tat $\alpha' \ll \beta'$ in $Co(X)$, wenn $\alpha \ll \beta$ in $Co(Y)$, dh. die unter (a) angegebene Reduktion des gerichteten Systems $Cov(Y,B)$ ändert den induzierten Homomorphismus

$$\check{f}^* : \check{H}^q(Y,B;G) \longrightarrow \check{H}^q(X,A;G)$$

nicht.

---

§ 3 Der Komplex X_{∞}.

Im folgenden sei X stets ein parakompakter Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge in X. - Wir knüpfen an § 1 an: Für $\alpha, \beta \in Co(X)$ mit $\alpha \ll \beta$ und für $V_j \in \beta$ war dort in (1.6) durch

$$p_\alpha^\beta(V_j) := \bigcap_{\substack{U_i \in \alpha \\ V_j \subseteq U_i}} U_i$$

eine eindeutig bestimmte Zuordnung

$$p_\alpha^\beta : \beta \longrightarrow \alpha$$

erklärt worden. Diese läßt sich - wie die Projektion (2.6) in § 2 - zu einer - hier nun aber eindeutig bestimmten - simplizialen Abbildung

(3.1) $$p_\alpha^\beta : (X_\beta, A_\beta) \longrightarrow (X_\alpha, A_\alpha)$$

der entsprechenden Nerven fortsetzen, die wir ebenfalls mit p_α^β bezeichnen: für $s_\beta^q \in X_\beta$, $s_\beta^q = (V_{i_0}, \ldots, V_{i_q})$ ist

(3.2) $$p_\alpha^\beta(s_\beta^q) := \left(p_\alpha^\beta(V_{i_0}), \ldots, p_\alpha^\beta(V_{i_q})\right) \in X_\alpha.$$

Es ist unmittelbar klar, daß der Teilkomplex A_β von X_β durch (3.2) in den Teilkomplex A_α von X_α abgebildet wird.

Unter Verwendung der in (2.5) eingeführten Notation kann (3.1) präziser beschrieben werden durch:

(3.3) $$p_\alpha^\beta : (X_\beta^q, A_\beta^q) \longrightarrow (X_\alpha^q, A_\alpha^q). \qquad (q \geq 0)$$

Die Beziehungen (1.7) und (1.8) aus Satz 1.5 übertragen sich ohne weiteres auf die eben eingeführten Projektionen p_α^β der Nerven; mithin:

(3.4) $p_\alpha^\alpha = id$ für $\alpha \in Co(X)$;

(3.5) $p_\alpha^\beta \cdot p_\beta^\gamma = p_\alpha^\gamma$ für $\alpha \ll \beta \ll \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in Co(X)$.

Daraus folgt: Die Paare (X_α^q, A_α^q) zusammen mit den Projektionen p_α^β bilden ein inverses System $\left\{(X_\alpha^q, A_\alpha^q),\ p_\alpha^\beta\right\}_{Co(X)}$.

3.1 Definition: Wir setzen

(3.6) $$(X_\infty^q, A_\infty^q) := \varprojlim_{\substack{\mathrm{Co}(X) \\ \alpha \ll \beta}} \left\{ (X_\alpha^q, A_\alpha^q), p_\alpha^\beta \right\} \qquad (q \geq 0);$$

(3.7) $$(X_\infty, A_\infty) := \bigcup_{q=0}^{\infty} (X_\infty^q, A_\infty^q).$$

(X_∞, A_∞) ist ein simpliziales Paar; es werde "das dem Paar (X,A) zugeordnete simpliziale Paar" genannt.

Bemerkungen: (1) Ein o-Simplex oder eine Ecke $e \in X_\infty^0 \subseteq X_\infty$ ist demgemäß ein Element $\langle\!\langle U_\alpha \rangle\!\rangle \in \prod_{\mathrm{Co}(X)} X_\alpha^0$ mit der Eigenschaft: $p_\alpha^\beta(U_\beta) = U_\alpha$ für $\alpha \ll \beta$. - Setzt man für einen beliebigen Punkt $x \in X$ und für jedes $\alpha \in \mathrm{Co}(X)$ unter Verwendung von (1.9)

$$U_\alpha := U_x ,$$

so folgt aus Lemma 1.6 : $\langle\!\langle U_\alpha \rangle\!\rangle$ ist eine Ecke im Komplex X_∞.

(2) Ein q-Simplex $s_\infty^q \in X_\infty^q$ ist ein System von q+1 Ecken $(e_0, \ldots, e_q)$,

$$e_\nu = \langle\!\langle U_\alpha^\nu \rangle\!\rangle \qquad (\nu = 0, \ldots, q)$$

mit der Eigenschaft: für jedes $\alpha \in \mathrm{Co}(X)$ ist $\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\alpha^\nu \neq \emptyset$. Beispiele für q-Simplexe s_∞^q mit $q \geq 1$ werden wir im nächsten Paragraphen kennenlernen. - s_∞^q ist ein q-Simplex in A_∞^q, wenn für alle $\alpha \in \mathrm{Co}(X)$ gilt: $(\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\alpha^\nu) \cap A \neq \emptyset$. A_∞ ist ein Teilkomplex von X_∞.

(3) Für jedes $q \geq 0$ und jedes $\alpha \in \mathrm{Co}(X)$ hat man in natürlicher Weise eine Projektion:

(3.8) $$p^\alpha : (X_\infty^q, A_\infty^q) \longrightarrow (X_\alpha^q, A_\alpha^q).$$

Aus der Definition von (X_∞^q, A_∞^q) als inversem Limes folgt unmittelbar die Beziehung:

(3.9) $$p_\alpha^\beta \cdot p^\beta = p^\alpha \quad \text{für } \alpha \ll \beta.$$

Die Zuordnung p_α^β aus (3.3) gibt in kanonischer Weise Anlaß zu einem Homomorphismus π_β^α der entsprechenden Cokettenmoduln:

(3.10) $$\pi_\beta^\alpha : C^q(X_\alpha, A_\alpha; G) \longrightarrow C^q(X_\beta, A_\beta; G) .$$

Für $c_\alpha^q \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$ wird π_β^α beschrieben durch

(3.11) $$\pi_\beta^\alpha(c_\alpha^q) := c_\alpha^q \cdot p_\alpha^\beta .$$

Aus den Beziehungen (3.4) und (3.5) ergibt sich sofort:

(3.12) $\pi_\alpha^\alpha = id$ für $\alpha \in Co(X)$;

(3.13) $\pi_\gamma^\beta \cdot \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$ für $\alpha \ll \beta \ll \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in Co(X)$.

Es folgt:

(3.14) $\{ C^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi_\beta^\alpha \}_{Co(X)}$ ist ein direktes System.-

Jede q-Cokette $c_\alpha^q \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$ induziert eine q-Cokette

$$c_\infty^q := c_\alpha^q \cdot p^\alpha$$

auf dem simplizialen Paar (X_∞, A_∞) mit Werten in G, dh. es ist $c_\infty^q \in C^q(X_\infty, A_\infty; G)$. Wir setzen:

$$C_\infty^q(X_\infty, A_\infty; G) := \{ c_\infty^q \} = \{ c_\alpha^q \cdot p^\alpha \mid c_\alpha^q \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \alpha \in Co(X) \} .$$

Es gilt:

3.2 Lemma. Für jedes $q \geq 0$ ist $C_\infty^q(X_\infty, A_\infty; G)$ Untermodul von $C^q(X_\infty, A_\infty; G)$.

Beweis: Seien $c_\infty^q = c_\alpha^q \cdot p^\alpha$ und $\tilde{c}_\infty^q = \tilde{c}_{\tilde{\alpha}}^q \cdot p^{\tilde{\alpha}}$ Elemente aus $C_\infty^q(X_\infty, A_\infty; G)$; wählt man $\beta \in Co(X)$, $\beta \gg \alpha, \tilde{\alpha}$, so gilt unter Verwendung von (3.9):

$$c_\infty^q = c_\alpha^q \cdot p^\alpha = c_\alpha^q \cdot p_\alpha^\beta p^\beta = c_\beta^q \cdot p^\beta \quad \text{mit } c_\beta^q := c_\alpha^q \cdot p_\alpha^\beta \in C^q(X_\beta, A_\beta; G),$$

$$\tilde{c}_\infty^q = \tilde{c}_{\tilde{\alpha}}^q \cdot p^{\tilde{\alpha}} = \tilde{c}_{\tilde{\alpha}}^q \cdot p_{\tilde{\alpha}}^\beta p^\beta = \tilde{c}_\beta^q \cdot p^\beta \quad \text{mit } \tilde{c}_\beta^q := \tilde{c}_{\tilde{\alpha}}^q \cdot p_{\tilde{\alpha}}^\beta \in C^q(X_\beta, A_\beta; G);$$

somit: $$c_\infty^q + \tilde{c}_\infty^q = c_\beta^q \cdot p^\beta + \tilde{c}_\beta^q \cdot p^\beta = (c_\beta^q + \tilde{c}_\beta^q) \cdot p^\beta .$$

Für $r \in R$ gilt: $$r \cdot c_\infty^q = r(c_\alpha^q \cdot p^\alpha) = (r \cdot c_\alpha^q) \cdot p^\alpha ,$$

womit die Aussage bewiesen ist.

Durch die Projektion p^α wird gemäß

(3.15) $$\pi_\infty^\alpha(c_\alpha^q) := c_\alpha^q \cdot p^\alpha \qquad c_\alpha^q \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$$

ein Homomorphismus

(3.16) $$\pi_\infty^\alpha : C^q(X_\alpha, A_\alpha; G) \longrightarrow C_\infty^q(X_\infty, A_\infty; G)$$

des q-ten Cokettenmoduls eines Paares (X_α, A_α) in den oben definierten Untermodul $C_\infty^q(X_\infty, A_\infty; G)$ gegeben.

Wegen (3.9) gilt:

(3.17) $$\pi^{\beta}_{\infty} \cdot \pi^{\alpha}_{\beta} = \pi^{\alpha}_{\infty} \qquad \text{für } \alpha \ll \beta,$$

dh. π^{α}_{∞} ist mit den Projektionen π^{α}_{β} des direkten Systems (3.14) vertauschbar. Aus der Theorie der direkten Limiten folgt: $\{\pi^{\alpha}_{\infty}\}_{\alpha \in Co(X)}$ induziert einen wohldefinierten Homomorphismus

(3.18) $$\pi_{\infty} : \varinjlim_{\substack{Co(X) \\ \alpha \ll \beta}} \{C^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^{\alpha}_{\beta}\} \longrightarrow C^q_{\infty}(X_\infty, A_\infty; G).$$

Bezeichnet man mit $[c^q_\alpha]$ die durch $c^q_\alpha \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$ repräsentierte Klasse des direkten Limes, so wird π_∞ beschrieben durch

(3.19) $$\pi_\infty [c^q_\alpha] := c^q_\alpha \cdot p^\alpha .$$

Die Unabhängigkeit dieser Zuordnung von der Wahl des Repräsentanten wird - wie eben erwähnt - durch die Beziehung (3.17) gesichert. - Der Nachweis, daß π_∞ ein Isomorphismus ist, wird im nächsten Paragraphen erbracht.

§ 4 Ein Isomorphiesatz.

4.1 Satz. Die Moduln $\varprojlim_{\substack{\mathrm{Co}(X)\\ \alpha \ll \beta}} \{C^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\}$ und $C^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$ sind isomorph vermöge der Abbildung

$$\pi_\infty[c^q_\alpha] := c^q_\alpha \cdot p^\alpha; \qquad c^q_\alpha \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G). \tag{4.1}$$

Beweis: Daß π_∞ wohldefiniert ist, wurde bereits am Ende des vorigen Paragraphen verifiziert.

Die Surjektivität von π_∞ ist evident.

Sei nun $\pi_\infty[c^q_\alpha] = 0$, dh.

$$c^q_\alpha \mid p^\alpha(X^q_\infty) = 0. \tag{4.2}$$

Zu zeigen ist: $[c^q_\alpha] = 0$; dies ist genau dann der Fall, wenn ein $\beta \in \mathrm{Co}(X)$, $\beta \gg \alpha$, existiert, derart, daß gilt:

$$\pi^\alpha_\beta(c^q_\alpha) = 0. \tag{4.3}$$

Beachtet man die Definition (3.11) von π^α_β, so bedeutet (4.3):

$$c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha = 0, \text{ das heißt: } c^q_\alpha \mid p^\beta_\alpha(X^q_\beta) = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (4.2) ist also offenbar hinreichend für die Eineindeutigkeit der Zuordnung (4.1) die Existenz eines $\beta^q \in \mathrm{Co}(X)$, $\beta^q \gg \alpha$ mit:

$$p^{\beta^q}_\alpha(X^q_{\beta^q}) \subseteq p^\alpha(X^q_\infty). \tag{4.4}$$

Diese Bedingung ist aber auch notwendig, da die Cokette c^q_α auf allen Simplexen $s^q_\alpha \in X^q_\alpha$ mit $s^q_\alpha \notin p^\alpha(X^q_\infty)$ von Null verschiedene Werte annehmen kann.

Wir bemerken in diesem Zusammenhang: Hat man für jedes $q > 0$ ein $\beta^q \in \mathrm{Co}(X)$, $\beta^q \gg \alpha$ mit der Eigenschaft (4.4) gefunden, und ist $n \geq 0$ eine beliebige, aber fest gewählte natürliche Zahl, so gilt für ein gemeinsames Oberelement $\beta \in \mathrm{Co}(X)$, $\beta \gg \beta^q$ für $q = 0, \ldots, n$ offenbar:

$$p^\beta_\alpha(X^q_\beta) \subseteq p^\alpha(X^q_\infty) \quad \text{für alle } q = 0, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Bevor wir nun für jedes $q \geq 0$ die Existenz einer Überdeckung $\beta^q \in Co(X)$ mit der Eigenschaft (4.4) nachweisen, soll der Komplex X_∞ näher untersucht werden; genauer: wir interessieren uns für diejenigen q-Simplexe $s^q_\alpha \in X^q_\alpha$, für die gilt: $s^q_\alpha \in p^\infty(X_\infty)$. Wir beginnen mit dem Fall $q = 0$ und geben zunächst folgende

4.2 Definition: Für $\alpha \in Co'(X), \alpha = \{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \in \alpha$, $x \in \overline{U_i}$ *) sei:

(4.6) $S_\alpha(i,x) := \left\{ U_{i_\varrho} \;\middle|\; U_{i_\varrho} \in \alpha, \text{ es gibt eine offene Umgebung } F_\varrho(x) \text{ von } x \text{ mit: } U_i \cap F_\varrho(x) \subseteq U_{i_\varrho} \right\}$.

Wir setzen der Einfachheit halber - auch in vergleichbaren späteren Fällen - $U_\varrho := U_{i_\varrho}$ und definieren:

(4.7) $$ {}_xU^*_i := \bigcap_{U_\varrho \in S_\alpha(i,x)} U_\varrho . $$

Wir nennen ${}_xU^*_i$ "die aus U_i bezüglich x gesternte Menge".

Bemerkungen: (1) Wegen $x \in \overline{U_i}$ ist $U_i \cap F(x) \neq \emptyset$ für jede Umgebung F(x) von x, dh. (4.6) beinhaltet eine nichttriviale Forderung an die U_ϱ.

(2) Es gilt $x \in \overline{U_\varrho}$ für $U_\varrho \in S_\alpha(i,x)$: Ist W(x) eine beliebige Umgebung von x, so ist auch $F_\varrho(x) \cap W(x)$ Umgebung von x, somit: $\emptyset \neq U_i \cap F_\varrho(x) \cap W(x) \subseteq U_\varrho \cap W(x)$, also $x \in \overline{U_\varrho}$. Da mit α auch $\overline{\alpha} := \{\overline{U_i}\}_{i\in I}$ lokalendlich ist, **) folgt: Es gibt nur endlich viele Elemente in $S_\alpha(i,x)$. Wählt man für jedes ϱ ein $F_\varrho(x)$ wie in (4.6), so ist also auch $F(x) := \bigcap_\varrho F_\varrho(x)$ eine Umgebung von x, und es gilt wegen $x \in \overline{U_i}$: $\emptyset \neq U_i \cap F(x) = U_i \cap \left(\bigcap_\varrho F_\varrho(x)\right) \subseteq \bigcap_\varrho U_\varrho = {}_xU^*_i$. ${}_xU^*_i$ ist somit eine wohldefinierte Menge aus α, $s^0_\alpha := ({}_xU^*_i)$ also eine Ecke in X^0_α.

(3) Es gilt trivialerweise ${}_xU^*_i \subseteq U_i$; ferner ist stets ${}_xU^*_i \subseteq U_x$: Wegen $x \in U_x$ und der Offenheit von U_x existiert eine Umge-

*) Der Querstrich bezeichnet die abgeschlossene Hülle.

**) Vgl. [3] III. § 13, p. 92.

bung $F(x) \subseteq U_x$, also $U_i \cap F(x) \subseteq F(x) \subseteq U_x$. dh. $U_x \in S_\alpha(i,x)$.

(4) Für $U_i := U_x$ gilt ${}_xU_x^* = U_x$: Wegen $x \in U_x$ und $x \in F_\rho(x)$ für alle ρ folgt: $x \in U_\rho$ für alle ρ. Aus der Definition von U_x ergibt sich dann: $U_x \subseteq U_\rho$ für alle ρ, somit: $U_x \subseteq \bigcap_\rho U_\rho = {}_xU_x^* \subseteq U_x$, letztere Inklusion nach Bem. (3).

Es gilt nun

4.3 Satz. Zu $s_\alpha^o := ({}_xU_i^*) \in X_\alpha^o$ existiert eine Ecke ${}_xe_i \in X_\infty^o$ mit $p^\alpha({}_xe_i) = ({}_xU_i^*)$; das heißt: $s_\alpha^o \in p^\alpha(X_\infty^o)$.

Beweis: Es ist für jedes $\beta \in Co(X)$, $\beta = \{V_j\}_{j\in J}$ ein $V^\beta \in \beta$, $V^\beta \neq \emptyset$ anzugeben, derart, daß

(4.8) für $\beta := \alpha$ gilt: $U^\alpha = {}_xU_i^*$;

(4.9) für $\gamma \in Co(X)$ mit $\gamma \gg \beta$, $\gamma = \{W_k\}_{k\in K}$ gilt: $p_\beta^\gamma(W^\gamma) = V^\beta$.

Wir definieren:

$$(4.10)\quad S_\beta(i,x) := \left\{ V_\sigma \;\middle|\; V_\sigma \in \beta,\ \text{es gibt eine offene Umgebung } G_\sigma(x) \text{ von } x \text{ mit: } U_i \cap G_\sigma(x) \subseteq V_\sigma \right\}_{\sigma=1}^{s}$$

$$(4.11)\quad V^\beta := {}_xV_i^\beta := \bigcap_{V_\sigma \in S_\beta(i,x)} V_\sigma ;$$

$$(4.12)\quad {}_xe_i := (\!({}_xV_i^\beta)\!)_{\beta \in Co(X)}.$$

Wie in den Bemerkungen (1) und (2) zu Def. 4.2 schließt man: $V^\beta \neq \emptyset$, sowie: es gibt nur endlich viele $V_\sigma \in S_\beta(i,x)$; V^β ist also eine wohldefinierte Menge aus β; somit: $s_\beta^o := (V^\beta) \in X_\beta^o$.

Zu zeigen bleiben (4.8) und (4.9):

(4.8) ist trivial, da (4.6) und (4.7) genau den Definitionen (4.1o) und (4.11) für die Überdeckung α entsprechen.- Zum Nachweis von (4.9) sei also $\gamma \in Co(X)$ mit $\gamma \gg \beta$; wir erklären wie oben:

$$(4.13)\quad S_\gamma(i,x) := \left\{ W_\tau \;\middle|\; W_\tau \in \gamma,\ \text{es gibt eine offene Umgebung } H_\tau(x) \text{ von } x \text{ mit: } U_i \cap H_\tau(x) \subseteq W_\tau \right\}_{\tau=1}^{t}$$

$$(4.14)\quad W^\gamma := {}_xW_i^\gamma := \bigcap_{W_\tau \in S_\gamma(i,x)} W_\tau .$$

Wir behaupten: $p_\beta^\gamma(W^\gamma) = V^\beta$.

Für $V_{\sigma_o} \in S_\beta(i,x)$ und $W_{\tau_o} \in S_\gamma(i,x)$ wählen wir eine feste Umgebung $G_{\sigma_o}(x)$ bzw. $H_{\tau_o}(x)$ mit: $U_i \cap G_{\sigma_o}(x) \subseteq V_{\sigma_o}$;

bzw. $U_i \cap H_{\tau_o}(x) \subseteq W_{\tau_o}$.

Es folgt:

(4.15) $$U_i \cap G_{\sigma_o}(x) \cap H_{\tau_o}(x) \subseteq V_{\sigma_o} \cap W_{\tau_o}.$$

Nun ist $G_{\sigma_o}(x) \cap H_{\tau_o}(x)$ eine offene Umgebung von x; wegen $x \in \overline{U_i}$ ist die linke Seite von (4.15) nichtleer, also gilt auch $V_{\sigma_o} \cap W_{\tau_o} \neq \emptyset$, dh. $V_{\sigma_o} \cap W_{\tau_o} \in \gamma$. Weiter folgt aus (4.15) unter Beachtung von (4.13): $V_{\sigma_o} \cap W_{\tau_o} \in S_\gamma(i,x)$; somit: $W^\gamma = \bigcap_{\tau=1}^{t} W_\tau \subseteq V_{\sigma_o} \cap W_{\tau_o} \subseteq V_{\sigma_o}$;

dies gilt für beliebiges $\sigma_o \in \{1,\dots,s\}$, mithin:

$$W^\gamma \subseteq \bigcap_{\sigma=1}^{s} V_\sigma = V^\beta \in \beta.$$

Aus der Definition der Zuordnung p_β^γ folgt nun unmittelbar:

$$p_\beta^\gamma(W^\gamma) \subseteq V^\beta.$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion genügt es, zu zeigen:

(4.16) Für alle $V_j \in \beta$ mit $W^\gamma \subseteq V_j$ gilt $V^\beta \subseteq V_j$;

denn daraus folgt: $$V^\beta \subseteq \bigcap_{W^\gamma \subseteq V_j} V_j = p_\beta^\gamma(W^\gamma).$$

Sei also $V_j \in \beta$ mit $W^\gamma \subseteq V_j$; für jedes $W_\tau \in S_\gamma(i,x)$ $(\tau = 1,\dots,t)$ werde eine Umgebung $H_\tau(x)$ gewählt mit $U_i \cap H_\tau(x) \subseteq W_\tau$;

dann ist auch $$H(x) := \bigcap_{\tau=1}^{t} H_\tau(x)$$

eine offene Umgebung von x, und es gilt:

$$U_i \cap H(x) = U_i \cap \Big(\bigcap_{\tau=1}^{t} H_\tau(x)\Big) = \bigcap_{\tau=1}^{t} \big(U_i \cap H_\tau(x)\big) \subseteq \bigcap_{\tau=1}^{t} W_\tau = W^\gamma \subseteq V_j.$$

Aus (4.10) folgt: $V_j \in S_\beta(i,x)$, also $V^\beta = \bigcap_{\sigma=1}^{s} V_\sigma \subseteq V_j$, was nach (4.16) zu zeigen war.

${}_x e_i$, wie in (4.12) definiert, ist also tatsächlich eine Ecke aus X_∞^o mit $p^\alpha({}_x e_i) = ({}_x U_i^*)$.

Wir beweisen nun die zu Satz 4.3 analoge Aussage für beliebiges $q \geq 0$:

4.4 Satz. $U_{i_0}, \ldots, U_{i_q}$ seien $q+1$ offene Mengen aus α - wir schreiben kurz $U_\nu := U_{i_\nu}$ $(\nu = 0, \ldots, q)$; für einen Punkt $x \in X$ gelte: $x \in \overline{U_\nu}$ für $\nu = 0, \ldots, q$; ${}_xU_\nu^*$ seien - wie in (4.7) eingeführt - die aus U_ν bezüglich x gesternten Mengen, die ein q-Simplex $s_\alpha^q := ({}_xU_0^*, \ldots, {}_xU_q^*)$ aus X_α^q aufspannen mögen.

Gilt $x \in \overline{\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\nu}$, so ist $s_\alpha^q \in p^\alpha(X_\infty^q)$.

Beweis: Wir konstruieren wie beim Beweis des Satzes 4.3 die Ecken ${}_xe_\nu$: Für $\beta \in Co(X)$ und für jedes $\nu \in \{0, \ldots, q\}$ sei

$$S_\beta(\nu, x) := \left\{ V_\sigma^\nu \;\middle|\; V_\sigma^\nu \in \beta;\ \begin{array}{l}\text{es gibt eine offene Umgebung} \\ G_\sigma^\nu(x) \text{ von } x \text{ mit: } U_\nu \cap G_\sigma^\nu(x) \subseteq V_\sigma^\nu\end{array} \right\}_{\sigma=1}^{s_\nu}$$

$$ {}_xV_\nu^\beta := \bigcap_{\sigma=1}^{s_\nu} V_\sigma^\nu; $$

$$ {}_xe_\nu := (\!({}_xV_\nu^\beta)\!)_{\beta \in Co(X)}. $$

Wir behaupten: ${}_xe_0, \ldots, {}_xe_q$ spannen ein q-Simplex aus X_∞^q auf. Nach Bemerkung (2) zu Definition 3.1 ist zu zeigen:

(4.17) $$\bigcap_{\nu=0}^{q} {}_xV_\nu^\beta \neq \emptyset \quad \text{für alle } \beta \in Co(X).$$

Wir wählen für jedes $\nu \in \{0, \ldots, q\}$ und für jedes $\sigma \in \{1, \ldots, s_\nu\}$ eine Umgebung $G_\sigma^\nu(x)$ mit $U_\nu \cap G_\sigma^\nu(x) \subseteq V_\sigma^\nu$.

$G(x) := \bigcap_{\nu=0}^{q} \bigcap_{\sigma=1}^{s_\nu} G_\sigma^\nu(x)$ ist dann eine offene Umgebung von x mit:

(4.18)
$$\left(\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\nu\right) \cap G(x) = \bigcap_{\nu=0}^{q} \left(U_\nu \bigcap_{\sigma=1}^{s_\nu} G_\sigma^\nu(x)\right) =$$

$$= \bigcap_{\nu=0}^{q} \bigcap_{\sigma=1}^{s_\nu} \left(U_\nu \cap G_\sigma^\nu(x)\right) \subseteq \bigcap_{\nu=0}^{q} \bigcap_{\sigma=1}^{s_\nu} V_\sigma^\nu = \bigcap_{\nu=0}^{q} {}_xV_\nu^\beta.$$

Da nach Voraussetzung $x \in \overline{\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\nu}$, ist der erste Term von (4.18) nichtleer, also gilt (4.17). - $s_\infty^q := ({}_xe_0, \ldots, {}_xe_q)$ ist somit

ein q-Simplex aus X^q_∞ und es folgt unter Verwendung von Satz 4.3:

$$p^\alpha(s^q_\infty) = (p^\alpha({}_x e_0), \ldots, p^\alpha({}_x e_q)) = ({}_x U^*_0, \ldots, {}_x U^*_q) = s^q_\alpha,$$

was zu zeigen war.

Mit dem eben bewiesenen Satz ist die Struktur von $p^\alpha(X^q_\infty)$ soweit geklärt, daß es nun möglich ist, an die Konstruktion einer Überdeckung β^q mit der Eigenschaft (4.4) heranzugehen.- Wir betrachten auch hier zunächst den Fall q = 0 und gehen dabei in mehreren Schritten vor.

Sei $x \in X$, $\alpha \in Co(X)$ und U_x wie üblich die kleinste Menge in α, die x enthält. Wir behaupten:

4.5 Lemma. Es gibt eine offene Umgebung $B_1(x)$ mit:

$$\overline{B_1(x)} \subseteq U_x. \tag{4.19}$$

Beweis: Wegen $x \in U_x$ liegt x nicht in der abgeschlossenen Komplementärmenge CU_x von U_x. Der zugrundeliegende Raum X ist parakompakt, daher auch normal, insbesondere also regulär; es existieren somit offene Umgebungen $B_1(x)$ und $D(CU_x)$ mit:

$$B_1(x) \cap D(CU_x) = \emptyset; \tag{4.20}$$

dann gilt auch:

$$\overline{B_1(x)} \cap D(CU_x) = \emptyset : \tag{4.21}$$

Angenommen, es gäbe ein $y \in \overline{B_1(x)} \cap D(CU_x)$, so existierte wegen der Offenheit von $D(CU_x)$ eine Umgebung W(y) mit $W(y) \subseteq D(CU_x)$, und es folgt: $B_1(x) \cap W(y) \subseteq B_1(x) \cap D(CU_x) = \emptyset$ nach (4.20); also ist $B_1(x) \cap W(y) = \emptyset$ im Widerspruch zu $y \in \overline{B_1(x)}$.

Aus (4.21) schließt man aber sofort:

$$\overline{B_1(x)} \cap CU_x \subseteq \overline{B_1(x)} \cap D(CU_x) = \emptyset,$$

somit: $\overline{B_1(x)} \subseteq CCU_x = U_x$, was in (4.19) behauptet wurde.

4.6 Lemma. Zu $x \in X$ und $\alpha \in Co(X)$ existiert eine Umgebung $B_2(x)$ mit der Eigenschaft:

(4.22) Für alle $U_i \in \alpha$ mit $U_i \cap B_2(x) \neq \emptyset$ gilt: $x \in \overline{U_i}$.

Beweis: Da mit α auch $\overline{\alpha}$ lokalendlich ist, existiert eine Umgebung $B_2'(x)$ mit:

(4.23) $B_2'(x) \cap \overline{U_i} \neq \emptyset$ für nur endlich viele $U_i \in \alpha$, etwa für $U_{i_0}, \ldots, U_{i_k}$ - wir setzen $U_\kappa := U_{i_\kappa}$ $(\kappa = 0, .., k)$.

Es gibt mindestens ein $U_i \in \alpha$ mit $x \in U_i$, also auch $x \in \overline{U_i}$; jedes derartige U_i ist notwendig eine der Mengen U_κ, $\kappa \in \{0, \ldots, k\}$. O.B.d.A. seien $U_0, \ldots, U_n$ $(n \leq k)$ alle Mengen aus α mit $x \in \overline{U_\nu}$ $(\nu = 0, \ldots, n)$. Für $\kappa = n+1, \ldots, k$ gilt dann also: $x \notin \overline{U_\kappa}$, somit auch $x \notin \bigcup_{\kappa=n+1}^{k} \overline{U_\kappa}$. Letztere Menge ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen; wegen der Regularität von X existiert eine offene Umgebung $B_2''(x)$ mit:

(4.24) $$B_2''(x) \cap \left(\bigcup_{\kappa=n+1}^{k} \overline{U_\kappa} \right) = \emptyset.$$

Wir behaupten, die offene Umgebung $B_2(x) := B_2'(x) \cap B_2''(x)$ hat die Eigenschaft (4.22):

Sei $U_i \in \alpha$ mit $U_i \cap B_2(x) \neq \emptyset$; dann ist also auch $\overline{U_i} \cap B_2'(x)$ nichtleer; wegen (4.23) ist U_i eine der Mengen $U_\kappa, \kappa \in \{0, \ldots, k\}$. Angenommen: $x \notin \overline{U_i}$; dann gilt nach Wahl von $U_0, \ldots, U_n$:

$$U_i \subseteq \bigcup_{\kappa=n+1}^{k} U_\kappa \subseteq \bigcup_{\kappa=n+1}^{k} \overline{U_\kappa};$$

es folgt:

$$U_i \cap B_2(x) \subseteq \left(\bigcup_{\kappa=n+1}^{k} \overline{U_\kappa} \right) \cap B_2''(x) = \emptyset \quad \text{nach (4.24)}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $U_i \cap B_2(x) \neq \emptyset$. Also war die Annahme $x \notin \overline{U_i}$ falsch und die Behauptung ist gezeigt.

Wie im Beweis des vorangegangenen Lemmas seien für $x \in X$:

(4.25) $U_0, \ldots, U_n$ sämtliche Mengen aus α mit $x \in \overline{U_\nu}$.

Wir konstruieren zu jedem U_ν, $\nu \in \{0, \ldots, n\}$, die bezüglich x gesternte Menge:

$$(4.26)\quad S_\alpha(\nu,x) := \left\{ U_\varrho^\nu \;\middle|\; U_\varrho^\nu \in \alpha;\ \text{es gibt eine offene Umgebung } F_\varrho^\nu(x) \text{ von x mit: } U_\nu \cap F_\varrho^\nu(x) \subseteq U_\varrho^\nu \right\}_{\varrho=1}^{r_\nu}$$

$$(4.27)\quad {}_xU_\nu^* := \bigcap_{\varrho=1}^{r_\nu} U_\varrho^\nu \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Für jedes $U_\varrho^\nu \in S_\alpha(\nu,x)$ $(\nu = 0, \ldots, n;\ \varrho = 1, \ldots, r_\nu)$ halten wir eine Umgebung $F_\varrho^\nu(x)$ fest und setzen

$$B_3(x) := \bigcap_{\nu=0}^{n} \bigcap_{\varrho=1}^{r_\nu} F_\varrho^\nu(x);$$

$B_3(x)$ ist eine offene Umgebung von x mit der Eigenschaft:

(4.28) $U_\nu \cap B_3(x) \subseteq U_\varrho^\nu$ für alle $\varrho = 1, \ldots, r_\nu$ $(\nu = 0, \ldots, n)$.

Nun wählen wir für $x \in X$ eine Umgebung $B_1(x)$ wie in Lemma 4.5, eine Umgebung $B_2(x)$ wie in Lemma 4.6 und $B_3(x)$ wie eben und setzen

$$(4.29)\quad B(x) := B_1(x) \cap B_2(x) \cap B_3(x).$$

B(x) ist dann eine offene Umgebung von x mit den Eigenschaften (4.19), (4.22) und (4.28), wenn man dort jeweils $B_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ durch B(x) ersetzt. - Wählt man für jedes $x \in X$ ein solches B(x), so erhält man eine offene Überdeckung von X:

$$(4.30)\quad \tilde{\beta} := \{B(x)\}_{x \in X}.$$

Bevor wir mit $\tilde{\beta}$ weiterarbeiten, beweisen wir eine wichtige Eigenschaft der Umgebung B(x) aus (4.29):

4.7 Satz. Sei M eine beliebige nichtleere Teilmenge von B(x): $\emptyset \neq M \subseteq B(x)$ und U_M - wie in (1.9) definiert - die kleinste Menge aus α, die M enthält; dann gilt:

$$(4.31)\quad x \in \overline{U_M};$$

$$(4.32)\quad {}_xU_M^* = U_M.$$

Beweis: Aus $M \subseteq B(x) \subseteq B_1(x) \subseteq U_x$ folgt die Existenz der Menge U_M in α, und es ist nach Definition:

(4.33) $$U_M = \bigcap_{\substack{U_i \in \alpha \\ M \subseteq U_i}} U_i .$$

Wegen $M \subseteq U_M$ gilt: $\emptyset \neq M = U_M \cap M \subseteq U_M \cap B(x) \subseteq U_M \cap B_2(x)$; aus (4.22) folgt somit: $x \in \overline{U_M}$.

Zum Beweis von (4.32) beachte man (4.25), wonach $U_0, \ldots, U_n$ sämtliche Mengen aus α sind mit $x \in \overline{U_\upsilon}$ $(\upsilon = 0, \ldots, n)$. Die eben bestätigte Beziehung (4.31) besagt also: U_M ist ein U_υ, etwa: $U_M = U_0$ und somit: $${}_xU^*_M = {}_xU^*_0 ;$$ die Konstruktion von ${}_xU^*_0$ ist aus (4.26) bzw. (4.27) für $\upsilon = 0$ ersichtlich. - Man hat also:

$M = U_M \cap M = U_0 \cap M \subseteq U_0 \cap B(x) \subseteq U_0 \cap B_3(x) \subseteq U^0_\varrho$ für alle $\varrho = 1, \ldots, r_0$ - letzteres wegen (4.28).

Aus (4.33) folgt: $U_M \subseteq U^0_\varrho$ für $\varrho = 1, \ldots, r_0$,

das heißt: $$U_M \subseteq \bigcap_{\varrho=1}^{r_0} U^0_\varrho = {}_xU^*_0 = {}_xU^*_M .$$

Umgekehrt gilt ${}_xU^*_M \subseteq U_M$ nach Bemerkung (3) zu Definition 4.2.

Wir wenden uns nun der unter (4.3o) angegebenen offenen Überdeckung $\tilde{\beta} = \{B(x)\}_{x \in X}$ des Raums X zu. Nach Satz 1.3 (a) existiert zu $\tilde{\beta}$ eine Verfeinerung $\hat{\beta} \in Co(X)$: $\hat{\beta} > \tilde{\beta}$.

Da Co(X) nach Satz 1.4 ein gerichtetes System ist, gibt es zur Ausgangsüberdeckung α und zu $\hat{\beta} \in Co(X)$ ein

$$\beta \in Co(X), \quad \beta = \{V_j\}_{j \in J} \text{ mit } \beta \gg \alpha, \hat{\beta}.$$

Wir behaupten: β hat die Eigenschaft (4.4) für $q = 0$:

Sei $s^0_\beta := (V_j)$ eine Ecke aus X^0_β. Wegen $\beta \gg \hat{\beta} > \tilde{\beta}$ existiert ein $x_j \in X$ mit $V_j \subseteq B(x_j)$. Nach Satz 4.7 gilt:

$$x_j \in \overline{U_{V_j}}, \qquad {}_{x_j}U^*_{V_j} = U_{V_j} .$$

Nach Bemerkung (1.1o) ist aber wegen $\beta \gg \alpha$: $U_{V_j} = p^\beta_\alpha(V_j)$;

schließlich folgt nach Satz 4.3: $x_j U^*_{V_j} \in p^{\alpha}(X^o_{\infty})$;

somit:

$$p^{\beta}_{\alpha}(s^o_{\beta}) = p^{\beta}_{\alpha}(V_j) = U_{V_j} = x_j U^*_{V_j} \in p^{\alpha}(X^o_{\infty}).$$

Dies gilt für beliebige $s^o_{\beta} \in X^o_{\beta}$, also:

$$p^{\beta}_{\alpha}(X^o_{\beta}) \subseteq p^{\alpha}(X^o_{\infty}).$$

Für q-Simplexe mit $q > 0$ leistet die angegebene Überdeckung β im allgemeinen noch nicht das Gewünschte; hierzu muß der Prozeß, der von α zu β führte, iteriert werden.

Es gilt:

4.8 Satz. Durch (2q+1)-malige Anwendung des Verfahrens, das aus der Anfangsüberdeckung α die wesentliche Verfeinerung $\beta^o := \beta$ lieferte, erhält man eine Überdeckung $\beta^{2q} \in Co(X)$, $\beta^{2q} \gg \alpha$, mit der Eigenschaft:

$$p^{\beta^{2q}}_{\alpha}(X^q_{\beta^{2q}}) \subseteq p^{\alpha}(X^q_{\infty}).$$

Um durch übermäßige Indizierung die Übersichtlichkeit der Darstellung nicht zu beeinträchtigen, werden wir zunächst das Verfahren für q = 1 – das also zur Überdeckung β^2 führt – ausführlich erläutern; die allgemeine Aussage ist daraus ohne Schwierigkeiten herleitbar. Um bereits jetzt eine Beziehung zur späteren Notation zu schaffen, werden wir die dort verwendeten Bezeichnungen jeweils in eckigen Klammern beifügen.

Beweis: Bezüglich $\beta = \{V_j\}_{j \in J}$ $\left[\beta^o = \{V^o_j\}_{j \in J_o}\right]$ als Ausgangsüberdeckung werden für jedes $x \in X$ die den offenen Umgebungen $B(x)$ $\left[B^o(x)\right]$ entsprechenden Mengen $C(x)$ $\left[B^1(x)\right]$ mit den zu (4.19) und (4.22) analogen Eigenschaften konstruiert; also:

(4.34) $\overline{C(x)} \subseteq V_x$ für $x \in X$;

(4.35) für alle $V_j \in \beta$ mit $C(x) \cap V_j \neq \emptyset$ gilt $x \in \overline{V_j}$.

Die Bedingung (4.28) ist nur für die offenen Mengen B(x) der Überdeckung β nötig - sie wurde beim Beweis von Satz 4.7 gebraucht - ; eine zu (4.28) analoge Beziehung für die Umgebungen C(x) ist nicht erforderlich; dies gilt auch für die nachfolgend zu konstruierenden Umgebungen D(x),....

Zu $\tilde{\gamma} := \{C(x)\}_{x\in X}$ $\left[\tilde{\beta}^1 := \{B^1(x)\}_{x\in X}\right]$ existiert nach Satz 1.3(a) eine Verfeinerung

$$\hat{\gamma} \in Co(X) : \hat{\gamma} > \tilde{\gamma},$$
$$\left[\hat{\beta}^1 \in Co(X) : \hat{\beta}^1 > \tilde{\beta}^1\right]$$

sowie zu $\beta \in Co(X)$ und $\hat{\gamma} \in Co(X)$ ein gemeinsames Oberelement

$$\gamma \in Co(X),\ \gamma = \{W_k\}_{k\in K} \text{ mit } \gamma \gg \beta, \hat{\gamma};$$
$$\left[\beta^1 \in Co(X),\ \beta^1 = \{v_j^1\}_{j\in J_1} \text{ mit } \beta^1 \gg \beta^\circ, \hat{\beta}^1\right].$$

Bezüglich γ als Ausgangsüberdeckung wählen wir nun für $x\in X$ offene Umgebungen $D(x)$ $\left[B^2(x)\right]$ mit:

(4.36) $\overline{D(x)} \subseteq W_x$ für $x\in X$;

(4.37) für alle $W_k \in \gamma$ mit $W_k \cap D(x) \neq \emptyset$ gilt $x \in \overline{W_k}$.

Zu $\tilde{\delta} := \{D(x)\}_{x\in X}$ $\left[\tilde{\beta}^2 := \{B^2(x)\}_{x\in X}\right]$ existiert wieder nach Satz 1.3(a) eine Verfeinerung

$$\hat{\delta} \in Co(X) : \hat{\delta} > \tilde{\delta},$$
$$\left[\hat{\beta}^2 \in Co(X) : \hat{\beta}^2 > \tilde{\beta}^2\right]$$

sowie zu $\gamma \in Co(X)$ und $\hat{\delta} \in Co(X)$ ein gemeinsames Oberelement

$$\delta \in Co(X),\ \delta = \{Z_l\}_{l\in L} \text{ mit } \delta \gg \gamma, \hat{\delta};$$
$$\left[\beta^2 \in Co(X),\ \beta^2 = \{v_j^2\}_{j\in J_2} \text{ mit } \beta^2 \gg \beta^1, \hat{\beta}^2\right].$$

Es ist $\delta \gg \alpha$. -

Sei nun $s_\delta^1 := (Z_{l_0}, Z_{l_1})$ ein 1-Simplex aus X_δ^1.

Wir setzen:

$$Z_i := Z_{l_i} \qquad (i = 0,1).$$

Wegen $\delta > \tilde{\delta}$ existiert ein $x_o \in X$ $\left[x_o^2 \in X \right]$ mit:

$$Z_o \subseteq D(x_o); \qquad \overline{D(x_o)} \subseteq W_{x_o} \in \gamma \text{ nach (4.36).}$$

Wegen $\gamma > \tilde{\gamma}$ existiert ein $y_o \in X$ $\left[x_o^1 \in X \right]$ mit:

$$W_{x_o} \subseteq C(y_o); \qquad \overline{C(y_o)} \subseteq V_{y_o} \in \beta \text{ nach (4.34).}$$

Wegen $\beta > \tilde{\beta}$ existiert ein $u_o \in X$ $\left[x_o^o \in X \right]$ mit:

$$V_{y_o} \subseteq B(u_o).$$

Man erhält somit eine aufsteigende Folge:

(4.38) $\quad Z_o \subseteq D(x_o) \subseteq W_{x_o} \subseteq \overline{C(y_o)} \subseteq V_{y_o} \subseteq B(u_o).$

In gleicher Weise gibt es Punkte $x_1, y_1, u_1 \in X$ $\left[x_1^2, x_1^1, x_1^o \in X \right]$, die eine entsprechende Folge für Z_1 liefern; wir benötigen nur die Anfangsterme:

(4.39) $\quad Z_1 \subseteq D(x_1) \subseteq W_{x_1} \subseteq \ldots\ldots$

Aus (4.38) und (4.39) ergibt sich: $\emptyset \neq Z_o \cap Z_1 \subseteq W_{x_o} \cap D(x_1)$;

aus (4.37) folgt: $\quad x_1 \in \overline{W_{x_o}}$,

also nach (4.38): $\quad x_1 \in \overline{C(y_o)} \subseteq V_{y_o} \in \beta$; somit:

(4.4o) $\qquad V_{x_1} \subseteq V_{y_o}$.

Daraus folgt mit Lemma 1.6, wonach $p_\beta^\gamma(W_{x_1}) = V_{x_1}$:

$$Z_1 \subseteq W_{x_1} \subseteq p_\beta^\gamma(W_{x_1}) = V_{x_1} \subseteq V_{y_o} \subseteq B(u_o).$$

Es gilt also:

(4.41) $\qquad Z_o \subseteq B(u_o) \qquad\qquad Z_1 \subseteq B(u_o).$

Satz 4.7 liefert nun:

$$u_o \in \overline{U_{Z_o}} \qquad\qquad u_o \in \overline{U_{Z_1}},$$

sowie:

$$U_{Z_o} = {}_{u_o}U^*_{Z_o} \qquad\qquad U_{Z_1} = {}_{u_o}U^*_{Z_1}.$$

Wegen $\delta \gg \alpha$ ist - siehe (1.1o) - :

$$U_{Z_o} = p_\alpha^\delta(Z_o) \qquad\qquad U_{Z_1} = p_\alpha^\delta(Z_1);$$

daher:

(4.42) $\quad p_\alpha^\delta(s_\delta^1) = (p_\alpha^\delta(Z_o), p_\alpha^\delta(Z_1)) = (U_{Z_o}, U_{Z_1}) = ({}_{u_o}U^*_{Z_o}, {}_{u_o}U^*_{Z_1}) =: s_\alpha^1 \in X_\alpha^1.$

Aus $Z_o \subseteq U_{Z_o}$ $\qquad$ $Z_1 \subseteq U_{Z_1}$

ergibt sich zusammen mit (4.41):

$$\emptyset \neq Z_o \cap Z_1 \subseteq U_{Z_o} \cap U_{Z_1} \cap B(u_o);$$

nach (4.22) folgt daraus:

$$u_o \in \overline{U_{Z_o} \cap U_{Z_1}}. \tag{4.43}$$

Mit (4.42) und (4.43) sind aber gerade die Voraussetzungen des Satzes 4.4 für $q = 1$ erfüllt; somit:

$$p^{\delta}_{\alpha}(s^1_{\delta}) \in p^{\alpha}(X^1_{\infty}),$$

was zunächst gezeigt werden sollte.

Es ist nun klar, wie im allgemeinen Fall vorzugehen ist: Ausgehend von $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ wird zunächst die Überdeckung $\beta = \{V_j\}_{j\in J} =: \beta^o$ konstruiert; von β^o geht man nun sukzessive (Definition durch vollständige Induktion!) zu den Überdeckungen $\beta^k \in Co(X)$ $(k \geq 1)$ über. Der Induktionsbeginn für $k = 1$: die Konstruktion von $\beta^1 := \gamma$ aus $\beta^o = \beta$ - ist durch die bisherige Beweisführung für den Fall $q = 1$ gegeben. - Ist $\beta^k = \{V^k_j\}_{j\in J_k}$ aus $Co(X)$ mit $\beta^k \gg \alpha$ bereits konstruiert, so bilde man die offene Überdeckung von X: $\tilde{\beta}^{k+1} = \{B^{k+1}(x)\}_{x\in X}$, wobei die offenen Umgebungen $B^{k+1}(x)$ den Bedingungen genügen:

$$\overline{B^{k+1}(x)} \subseteq V^k_x \quad \text{für } x \in X; \tag{4.44}$$

$$\text{für alle } V^k_j \in \beta^k \text{ mit } V^k_j \cap B^{k+1}(x) \neq \emptyset \text{ gilt } x \in \overline{V^k_j}. \tag{4.45}$$

Zu $\tilde{\beta}^{k+1}$ existiert nach Satz 1.3(a) eine Verfeinerung

$$\hat{\beta}^{k+1} \in Co(X) : \quad \hat{\beta}^{k+1} > \tilde{\beta}^{k+1},$$

sowie zu $\beta^k \in Co(X)$ und $\hat{\beta}^{k+1} \in Co(X)$ ein gemeinsames Oberelement

$$\beta^{k+1} \in Co(X), \quad \beta^{k+1} = \{V^{k+1}_j\}_{j\in J_{k+1}}, \quad \beta^{k+1} \gg \beta^k, \hat{\beta}^{k+1}.$$

Es ist $\beta^{k+1} \gg \alpha$, und damit ist der Schritt von k auf k+1 vollzogen.

Wir behaupten: die Überdeckung $\beta^{2q} = \{V_j^{2q}\}_{j\in J_{2q}} \in \mathfrak{C}_0(X)$ hat die in Satz 4.8 ausgesprochene Eigenschaft.

Sei $s^q_{\beta^{2q}} := (V_0^{2q},\ldots,V_q^{2q})$ ein q-Simplex aus $X^q_{\beta^{2q}}$.

Wegen $\beta^{2q} > \tilde{\beta}^{2q}; \quad \beta^{2q-1} > \tilde{\beta}^{2q-1}; \quad \ldots$

existieren Punkte $x_\upsilon^\mu \in X$ $(\upsilon = 0,\ldots,q;\ \mu = 2q,\ldots,0)$, die unter Verwendung von (4.44) ein den Beziehungen (4.38) und (4.39) entsprechendes System von aufsteigenden Folgen liefern:

$$(4.46)\quad V_0^{2q} \subseteq B^{2q}(x_0^{2q}) \subseteq V^{2q-1}_{x_0^{2q}} \subseteq \overline{B^{2q-1}(x_0^{2q-1})} \subseteq V^{2q-2}_{x_0^{2q-1}} \subseteq \ldots.$$

$$(4.47)\quad V_1^{2q} \subseteq B^{2q}(x_1^{2q}) \subseteq V^{2q-1}_{x_1^{2q}} \subseteq \ldots.$$

$$(4.48)\quad V_2^{2q} \subseteq \ldots. \qquad \ldots. \subseteq V^{2q-2}_{x_2^{2q-1}} \subseteq \ldots.$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$(4.49)\quad V_q^{2q} \subseteq \ldots. \qquad \ldots. \subseteq V^{2q-2}_{x_q^{2q-1}} \subseteq \ldots.$$

Aus (4.46) und (4.47) ergibt sich:

$$\emptyset \neq V_0^{2q} \cap V_1^{2q} \subseteq V^{2q-1}_{x_0^{2q}} \cap B^{2q}(x_1^{2q});$$

aus (4.45) folgt für k = 2q - 1:

$$x_1^{2q} \in \overline{V^{2q-1}_{x_0^{2q}}},$$

also nach (4.46):

$$x_1^{2q} \in \overline{B^{2q-1}(x_0^{2q-1})} \subseteq V^{2q-2}_{x_0^{2q-1}} \in \beta^{2q-2};$$

somit:

$$V^{2q-2}_{x_1^{2q}} \subseteq V^{2q-2}_{x_0^{2q-1}}$$

und es folgt:

$$V_1^{2q} \subseteq V^{2q-1}_{x_1^{2q}} \subseteq p^{\beta^{2q-1}}_{\beta^{2q-2}}(V^{2q-1}_{x_1^{2q}}) = V^{2q-2}_{x_1^{2q}} \subseteq V^{2q-2}_{x_0^{2q-1}}.$$

Man hat also:

$$(4.50)\quad \left.\begin{matrix} V_0^{2q} \\ V_1^{2q} \end{matrix}\right\} \subseteq V^{2q-2}_{x_0^{2q-1}}.$$

Nach (4.48) gilt:

$$(4.51)\quad V_2^{2q} \subseteq V^{2q-2}_{x_2^{2q-1}};$$

Nun wendet man dieselbe Schlußweise auf die Mengen

$$V^{2q-2}_{x_0^{2q-1}} \quad \text{und} \quad V^{2q-2}_{x_2^{2q-1}}$$

an, wobei man sich (4.46) und (4.48) nach rechts fortgesetzt zu denken hat; man erhält:

$$\left.\begin{matrix} V^{2q-2}_{x^{2q-1}_0} \\ V^{2q-2}_{x^{2q-1}_2} \end{matrix}\right\} \subseteq V^{2q-4}_{x^{2q-3}_0}$$

und somit wegen (4.5o) und (4.51):

$$\left.\begin{matrix} V^{2q}_0 \\ V^{2q}_1 \\ V^{2q}_2 \end{matrix}\right\} \subseteq V^{2q-4}_{x^{2q-3}_0}$$

Nach q derartigen Schritten ergibt sich schließlich:

$$\left.\begin{matrix} V^{2q}_0 \\ \vdots \\ V^{2q}_q \end{matrix}\right\} \subseteq V^0_{x^1_0} \subseteq B^0(x^0_0), \tag{4.52}$$

letztere Inklusion wegen $\beta^0 > \tilde{\beta}^0$. - Nach Satz 4.7 gilt nun mit $U_\nu := U_{V^{2q}_\nu}$ $(\nu = 0,\dots,q)$:

$$x^0_0 \in \overline{U_\nu} \qquad U_\nu = x^0_0 U^*_\nu \qquad (\nu = 0,\dots,q).$$

Somit:

$$p^{\beta^{2q}}_\alpha(s^q_{\beta^{2q}}) = (x^0_0 U^*_0,\dots,x^0_0 U^*_q) =: s^q_\alpha \in X^q_\alpha. \tag{4.53}$$

Schließlich folgt aus $V^{2q}_\nu \subseteq U_\nu$ $(\nu = 0,\dots,q)$ zusammen mit (4.52):

$$\emptyset \neq \bigcap_{\nu=0}^{q} V^{2q}_\nu \subseteq \left(\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\nu\right) \cap B^0(x^0_0),$$

was nach Konstruktion von $B^0(x^0_0)$

$$x^0_0 \in \overline{\bigcap_{\nu=0}^{q} U_\nu} \tag{4.54}$$

zur Folge hat. - Mit (4.53) und (4.54) sind aber die Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt; somit:

$$p^{\beta^{2q}}_\alpha(s^q_{\beta^{2q}}) \in p^\infty(X^q_\infty).$$

Da dies für beliebige q-Simplexe aus $X^q_{\beta^{2q}}$ gilt, ist Satz 4.8 und damit auch der Isomorphiesatz 4.1 bewiesen.

Für spätere Zwecke ist es vorteilhaft, die eben gezeigte Eineindeutigkeit des Homomorphismus π_∞ wie folgt zu fassen:

4.9 Korollar. Gilt für eine Cokette $c_\alpha^q \in C_\alpha^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$

$$c_\alpha^q \cdot p^\alpha = 0,$$

so existiert ein $\beta \in Co(X)$, $\beta \gg \alpha$ mit:

$$c_\alpha^q \cdot p_\alpha^\beta = 0.$$

§ 5 Die Cohomologie H^*_∞.

Wir gehen in diesem Paragraphen zu den Cohomologiemoduln über. - Für $\alpha \in Co(X)$ wurde in (3.8) die Projektion

$$p^\alpha : (X^q_\infty, A^q_\infty) \longrightarrow (X^q_\alpha, A^q_\alpha)$$

eingeführt; p^α ist eine simpliziale Abbildung. Folglich gilt für die Corandhomomorphismen

(5.1) $$\delta^q : C^q(X_\infty, A_\infty; G) \longrightarrow C^{q+1}(X_\infty, A_\infty; G)$$

und (5.2) $$\delta^q_\alpha : C^q(X_\alpha, A_\alpha; G) \longrightarrow C^{q+1}(X_\alpha, A_\alpha; G) \qquad (q \geq 0)$$

die Beziehung:

(5.3) $$\delta^q(c^q_\alpha \cdot p^\alpha) = (\delta^q_\alpha(c^q_\alpha)) \cdot p^\alpha \qquad \text{für } c^q_\alpha \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G).$$

Daraus folgt: Die Restriktion δ^q_∞ von δ^q auf den Untermodul $C^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$ von $C^q(X_\infty, A_\infty; G)$ ist ein Homomorphismus

(5.4) $$\delta^q_\infty : C^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G) \longrightarrow C^{q+1}_\infty(X_\infty, A_\infty; G),$$

und es gilt trivialerweise

(5.5) $$\delta^q_\infty(c^q_\alpha \cdot p^\alpha) = (\delta^q_\alpha(c^q_\alpha)) \cdot p^\alpha.$$

5.1 Definition: Wir erklären:

$$\begin{aligned} Z^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G) &:= \text{Kern}(\delta^q_\infty); \\ B^{q+1}_\infty(X_\infty, A_\infty; G) &:= \text{Bild}(\delta^q_\infty); \\ B^0_\infty(X_\infty, A_\infty; G) &:= 0; \\ H^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G) &:= Z^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)/B^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G). \end{aligned} \qquad \text{für } q \geq 0.$$

$H^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$ werde der "q-te Co(X)-reduzierte Cohomologiemodul" des simplizialen Paares (X_∞, A_∞) genannt. -

Für $\alpha, \beta \in Co(X)$ mit $\alpha \ll \beta$ hatten wir in (3.3)

$$p^\beta_\alpha : (X^q_\beta, A^q_\beta) \longrightarrow (X^q_\alpha, A^q_\alpha)$$

definiert; p^β_α ist eine simpliziale Abbildung. Es gilt daher auch für die Corandoperatoren δ^q_α und δ^q_β eine Vertauschbarkeitsregel:

(5.6) $$\delta^q_\beta(c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha) = (\delta^q_\alpha(c^q_\alpha)) \cdot p^\beta_\alpha \qquad \text{für } c^q_\alpha \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$$

oder unter Verwendung von (3.11):

$$\delta^q_\beta(\pi^\alpha_\beta(c^q_\alpha)) \;=\; \pi^\alpha_\beta(\delta^q_\alpha(c^q_\alpha)) \,. \tag{5.7}$$

Bezeichnet man wie üblich den Kern des Corandhomomorphismus δ^q_α aus (5.2) mit $Z^q(X_\alpha,A_\alpha;G)$, sein Bild mit $B^{q+1}(X_\alpha,A_\alpha;G)$, so folgt aus (5.7): Die Homomorphismen

$$\pi^\alpha_\beta:\; C^q(X_\alpha,A_\alpha;G)\longrightarrow C^q(X_\beta,A_\beta;G),$$

beschränkt auf die Cozyklen- bzw. Coründermoduln, induzieren Homomorphismen

$$\dot\pi^\alpha_\beta:\; Z^q(X_\alpha,A_\alpha;G)\longrightarrow Z^q(X_\beta,A_\beta;G)$$

$$\ddot\pi^\alpha_\beta:\; B^q(X_\alpha,A_\alpha;G)\longrightarrow B^q(X_\beta,A_\beta;G).$$

Also bilden

$$\left\{Z^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\dot\pi^\alpha_\beta\right\}_{Co(X)} \quad\text{und}\quad \left\{B^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\ddot\pi^\alpha_\beta\right\}_{Co(X)}$$

direkte Systeme, deren Limiten in natürlicher Weise Untermoduln von $\varinjlim\limits_{\substack{Co(X)\\ \alpha\ll\beta}}\left\{C^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\pi^\alpha_\beta\right\}$ sind.

Die Frage, wie sich diese Untermoduln bei dem Isomorphismus π_∞ verhalten, beantwortet der folgende

5.2 Satz. Unter dem Isomorphismus

$$\pi_\infty : \varinjlim_{\substack{Co(X)\\ \alpha\ll\beta}}\left\{C^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\pi^\alpha_\beta\right\} \cong C^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G)$$

gilt für alle $q\geq 0$:

$$\dot\pi_\infty : \varinjlim_{\substack{Co(X)\\ \alpha\ll\beta}}\left\{Z^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\dot\pi^\alpha_\beta\right\} \cong Z^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G), \tag{5.8}$$

$$\ddot\pi_\infty : \varinjlim_{\substack{Co(X)\\ \alpha\ll\beta}}\left\{B^q(X_\alpha,A_\alpha;G),\ddot\pi^\alpha_\beta\right\} \cong B^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G). \tag{5.9}$$

Beweis: Mit $\left[z^q_\alpha\right]$ sei die durch $z^q_\alpha \in Z^q(X_\alpha,A_\alpha;G)$ repräsentierte Klasse im direkten Limes bezeichnet; dann wird $\dot\pi_\infty$ beschrieben durch: $\dot\pi_\infty\left[z^q_\alpha\right] := z^q_\alpha\cdot p^\alpha$.

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten z^q_α; daß $z^q_\alpha\cdot p^\alpha$ in $Z^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G)$ liegt, folgt aus (5.5); zu zeigen bleibt die Surjektivität von $\dot\pi_\infty$.

Sei also $z^q_\infty \in Z^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G) \subseteq C^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$; dann existiert eine Darstellung $z^q_\infty = c^q_\alpha \cdot p^\alpha$ für ein $\alpha \in Co(X)$ und ein c^q_α aus $C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$. Nun gilt mit (5.5):

$$0 = \delta_\infty(z^q_\infty) = \delta_\infty(c^q_\alpha \cdot p^\alpha) = (\delta_\alpha(c^q_\alpha)) \cdot p^\alpha ;*)$$

nach Korollar 4.9 gibt es ein $\beta \in Co(X)$, $\beta \gg \alpha$ mit:

$$(\delta_\alpha(c^q_\alpha)) \cdot p^\beta_\alpha = 0;$$

aus (5.6) folgt: $\delta_\beta(c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha) = 0$, dh. $c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha =: z^q_\beta \in Z^q(X_\beta, A_\beta; G)$. Beachtet man $p^\alpha = p^\beta_\alpha \cdot p^\beta$, so gilt also:

$$z^q_\infty = c^q_\alpha \cdot p^\alpha = c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha \cdot p^\beta = z^q_\beta \cdot p^\beta ;$$

somit: $$\pi_\infty[z^q_\beta] = z^q_\infty ,$$

womit (5.8) gezeigt ist.

Die Aussage (5.9) ist für $q = 0$ trivial.- Sei also $q \geq 1$:

Für $[b^q_\alpha] \in \varprojlim_{\substack{Co(X) \\ \alpha \ll \beta}} \{B^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\}$ wird π_∞ beschrieben durch:

$$\pi_\infty[b^q_\alpha] := b^q_\alpha \cdot p^\alpha .$$

π_∞ ist wohldefiniert, und es ist $b^q_\alpha \cdot p^\alpha \in B^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$ wegen (5.5). Zum Nachweis der Surjektivität von π_∞ sei

$$b^q_\infty \in B^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G) \subseteq C^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G);$$

es gilt $b^q_\infty = c^q_\alpha \cdot p^\alpha$ für ein $\alpha \in Co(X)$ und ein $c^q_\alpha \in C^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$. Weiter existiert eine $(q-1)$-Cokette $c^{q-1}_\infty \in C^{q-1}_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$ mit:

$b^q_\infty = \delta_\infty(c^{q-1}_\infty)$; dabei ist $c^{q-1}_\infty = c^{q-1}_{\tilde\alpha} \cdot p^{\tilde\alpha}$ für ein $\tilde\alpha \in Co(X)$.

Unter Beachtung von (5.5) hat man also:

(5.10) $$c^q_\alpha \cdot p^\alpha = \delta_\infty(c^{q-1}_\infty) = \delta_\infty(c^{q-1}_{\tilde\alpha} p^{\tilde\alpha}) = (\delta_{\tilde\alpha}(c^{q-1}_{\tilde\alpha})) \cdot p^{\tilde\alpha}.$$

Wählt man nun ein $\beta \in Co(X)$ mit $\beta \gg \alpha, \tilde\alpha$ und verwendet

$$p^\alpha = p^\beta_\alpha \cdot p^\beta \qquad p^{\tilde\alpha} = p^\beta_{\tilde\alpha} \cdot p^\beta ,$$

so folgt aus (5.10):

$$c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha \cdot p^\beta = (\delta_{\tilde\alpha}(c^{q-1}_{\tilde\alpha})) \cdot p^\beta_{\tilde\alpha} \cdot p^\beta ,$$

das heißt: $$(c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha - (\delta_{\tilde\alpha}(c^{q-1}_{\tilde\alpha})) \cdot p^\beta_{\tilde\alpha}) \cdot p^\beta = 0.$$

Nach Korollar 4.9 existiert ein $\gamma \in Co(X)$, $\gamma \gg \beta$ mit:

$$(c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha - (\delta_{\tilde\alpha}(c^{q-1}_{\tilde\alpha})) \cdot p^\beta_{\tilde\alpha}) \cdot p^\gamma_\beta = 0,$$

---

*) Wenn der Zusammenhang klar ist, schreiben wir künftig einfach δ_∞ statt δ^q_∞, δ_α statt δ^q_α, usw.

also: $c^q_\alpha \cdot p^\beta_\alpha \cdot p^\gamma_\beta - (\delta_\alpha(c^{q-1}_\alpha)) \cdot p^\beta_\alpha \cdot p^\gamma_\beta = 0$, dh. $c^q_\alpha \cdot p^\gamma_\alpha = (\delta_\alpha(c^{q-1}_\alpha)) \cdot p^\gamma_\alpha$

oder nach (5.6):

$$c^q_\alpha \cdot p^\gamma_\alpha = \delta_\gamma(c^{q-1}_\alpha \cdot p^\gamma_\alpha) =: b^q_\gamma \in B^q(X_\gamma, A_\gamma; G).$$

Es folgt nun:

$$b^q_\infty = c^q_\alpha \cdot p^\infty = c^q_\alpha \cdot p^\gamma_\alpha \cdot p^\gamma = b^q_\gamma \cdot p^\gamma,$$

somit:

$$\pi_\infty[b^q_\gamma] = b^q_\infty .$$

Nun ist es möglich, die Cohomologiemoduln zu betrachten:

5.3 Satz. Für alle $q \geq 0$ sind die Čechschen Cohomologiemoduln $\check{H}^q(X,A;G)$ des Paares (X,A) isomorph zu den Co(X)-reduzierten Cohomologiemoduln $H^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$ des simplizialen Paares (X_∞, A_∞) vermöge eines Isomorphismus

(5.11) $$\pi : \check{H}^q(X,A;G) \cong H^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G),$$

der wie folgt beschrieben wird: Für $h^q \in \check{H}^q(X,A;G)$ wähle man einen Repräsentanten $h^q_\alpha \in H^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$ sowie einen Cozyklus $z^q_\alpha \in h^q_\alpha$; dann ist

$$\pi(h^q) := \overline{\pi_\infty[z^q_\alpha]} = \overline{z^q_\alpha \cdot p^\infty};$$

dabei bezeichnet $\overline{z^q_\alpha \cdot p^\infty}$ die durch $z^q_\alpha \cdot p^\infty$ repräsentierte Co(X)-reduzierte Cohomologieklasse aus $H^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)$.

Beweis: Es gilt:

$$\check{H}^q(X,A;G) := \varinjlim_{\substack{\mathrm{Cov}(X,A) \\ \alpha < \beta}} \{H^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\} \cong$$

(nach Satz 2.1)

$$\cong \varinjlim_{\substack{\mathrm{Co}(X) \\ \alpha \ll \beta}} \{H^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\} =$$

$$= \varinjlim_{\substack{\mathrm{Co}(X) \\ \alpha \ll \beta}} \{Z^q(X_\alpha, A_\alpha; G)/B^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\} \cong$$

(wegen der Invarianz der Exaktheit einer Modulsequenz beim Übergang zum direkten Limes)

$$\cong \varinjlim_{\substack{\mathrm{Co}(X) \\ \alpha \ll \beta}} \{Z^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\} / \varinjlim_{\substack{\mathrm{Co}(X) \\ \alpha \ll \beta}} \{B^q(X_\alpha, A_\alpha; G), \pi^\alpha_\beta\} \cong$$

(nach Satz 5.2)

$$\cong Z^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G)/B^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G) =$$

(nach Def. 5.1)

$$= H^q_\infty(X_\infty, A_\infty; G).$$

Die angegebene Definition des Isomorphismus π folgt unmittelbar durch Komposition der in umseitigem Beweis nicht näher bezeichneten kanonischen Isomorphismen.

Abschließend zeigen wir die Verträglichkeit des Isomorphismus π mit den durch stetige Abbildungen induzierten Homomorphismen und den dimensionserhöhenden Homomorphismen.

Sei Y ein parakompakter Raum, B eine abgeschlossene Teilmenge von Y und

$$f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$$

eine stetige Abbildung. Wie im Beweis zu Satz 2.1 (b) gezeigt wurde, ist für jedes $\alpha \in Co(Y)$ die Überdeckung $\alpha' := f^{-1}(\alpha)$ aus $Co(X)$; ferner wurde festgestellt, daß für $\beta \in Co(Y)$ mit $\alpha \ll \beta$ auch $\alpha' \ll \beta'$ in $Co(X)$ gilt. Man hat simpliziale Abbildungen

$$f_\alpha : (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \longrightarrow (Y_\alpha, B_\alpha)$$

derart, daß das Diagramm - vgl. (2.15) -

$$\begin{array}{ccc} (X_{\beta'}, A_{\beta'}) & \xrightarrow{p^{\beta'}_{\alpha'}} & (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ (Y_\beta, B_\beta) & \xrightarrow{p^{\beta}_{\alpha}} & (Y_\alpha, B_\alpha) \end{array} \tag{5.12}$$

kommutiert. Also induziert das System $\{f_\alpha\}_{\alpha \in Co(Y)}$ eine simpliziale Abbildung der zugehörigen inversen Limiten:

$$f_\infty : (X_\infty, A_\infty) \longrightarrow (Y_\infty, B_\infty), \tag{5.13}$$

und es herrscht Kommutativität im Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (X_\infty, A_\infty) & \xrightarrow{p^{\alpha'}} & (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\infty} & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ (Y_\infty, B_\infty) & \xrightarrow{p^{\alpha}} & (Y_\alpha, B_\alpha) . \end{array} \tag{5.14}$$

Beim Übergang zu den Cokettenmoduln erhält man aus (5.13) einen Homomorphismus

$$f^*_\infty : C^q(Y_\infty, B_\infty; G) \longrightarrow C^q(X_\infty, A_\infty; G). \tag{5.15}$$

Sei nun c^q_∞ eine Cokette aus dem Untermodul $C^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G)$ von $C^q(Y_\infty,B_\infty;G)$; dann gilt eine Darstellung $c^q_\infty = c^q_\alpha \cdot p^\alpha$ für ein $\alpha \in Co(Y)$ und ein $c^q_\alpha \in C^q(Y_\alpha;B_\alpha;G)$, und es folgt unter Beachtung der Kommutativität von (5.14):

$$f^\cdot_\infty(c^q_\infty) = f^\cdot_\infty(c^q_\alpha \cdot p^\alpha) = c^q_\alpha \cdot p^\alpha \cdot f_\infty = c^q_\alpha \cdot f_{\alpha'} \cdot p^{\alpha'} \in C^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G);$$

also induziert $f^\cdot_\infty$ einen Homomorphismus der Moduln

$$C^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G) \longrightarrow C^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G). \tag{5.16}$$

Ebenso leicht rechnet man unter Benutzung der Vertauschbarkeitsregel (5.5) nach, daß unter dem Homomorphismus (5.16) gilt:

$$Z^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G) \longrightarrow Z^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G)$$

und

$$B^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G) \longrightarrow B^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G).$$

Durch $f^\cdot_\infty$ wird also ein Homomorphismus

$$f^*_\infty: H^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G) \longrightarrow H^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G)$$

induziert, der sich wie folgt beschreibt: Ist $z^q_\infty \in Z^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G)$ ein repräsentierender Cozyklus aus der Klasse $h^q_\infty \in H^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G)$, - wir schreiben wieder $h^q_\infty = \overline{z^q_\infty}$ - so ist

$$f^*_\infty(h^q_\infty) := \overline{f^\cdot_\infty(z^q_\infty)} = \overline{z^q_\infty \cdot f_\infty}. \tag{5.17}$$

Schließlich vermittelt f den aus der Čechschen Theorie bekannten "induzierten Homomorphismus" - vgl. (2.17) -

$$\check{f}^*: \check{H}^q(Y,B;G) \longrightarrow \check{H}^q(X,A;G).$$

Wir behaupten:

5.4 Lemma. Es herrscht Kommutativität im Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^q(Y,B;G) & \xrightarrow{\check{f}^*} & \check{H}^q(X,A;G) \\ \varkappa_Y \downarrow & & \downarrow \varkappa_X \\ H^q_\infty(Y_\infty,B_\infty;G) & \xrightarrow{f^*_\infty} & H^q_\infty(X_\infty,A_\infty;G). \end{array} \tag{5.18}$$

Beweis: Sei $h^q \in \check{H}^q(Y,B;G)$, h^q_α ein Repräsentant von h^q - das heißt: $h^q = \left[h^q_\alpha\right]$ - und $z^q_\alpha \in h^q_\alpha$; dann ist $\check{f}^*(h^q) = \left[\overline{z^q_\alpha \cdot f_\alpha}\right]$ und somit - man beachte Satz 5.3:

$$\pi_X \cdot \check{f}^*(h^q) = \pi_X \left[\overline{z_\alpha^q \cdot f_\alpha} \right] = \overline{z_\alpha^q \cdot f_\alpha \cdot p^\alpha};$$

Andererseits gilt unter Verwendung von (5.17):

$$f_{\infty\infty}^* \cdot \pi_Y(h^q) = f_{\infty\infty}^* (\overline{z_\alpha^q \cdot p^\alpha}) = \overline{z_\alpha^q \cdot p^\alpha \cdot f_{\infty\infty}}.$$

Aus der Kommutativität von (5.14) folgt nun die Behauptung.

Schließlich existiert analog zu dem aus der simplizialen Theorie bekannten Corandoperator

$$H^q(A_{\infty\infty};G) \longrightarrow H^{q+1}(X_{\infty\infty}, A_{\infty\infty};G)$$

ein Homomorphismus

(5.19) $\quad \delta_{\infty\infty}^* : H_{\infty\infty}^q(A_{\infty\infty};G) \longrightarrow H_{\infty\infty}^{q+1}(X_{\infty\infty}, A_{\infty\infty};G)$:

für $h_{\infty\infty}^q \in H_{\infty\infty}^q(A_{\infty\infty};G)$ wähle man $z_{\infty\infty}^q \in Z_{\infty\infty}^q(A_{\infty\infty};G)$ mit $h_{\infty\infty}^q = \overline{z_{\infty\infty}^q}$; es ist $z_{\infty\infty}^q = z_\alpha^q \cdot p^\alpha$ für ein $\alpha \in Co(X)$ und ein $z_\alpha^q \in Z^q(A_\alpha;G)$. Setzt man nun $z_{\infty\infty}^q = z_\alpha^q \cdot p^\alpha$ zu einer Cokette $c_{\infty\infty}^q \in C_{\infty\infty}^q(X_{\infty\infty};G)$ fort, indem man die Werte von $c_{\infty\infty}^q$ auf q-Simplexen $s_{\infty\infty}^q \in X_{\infty\infty} - p^{\alpha-1}(A_\alpha)$ als Null definiert, so ist $\delta_{\infty\infty}(c_{\infty\infty}^q) \in Z_{\infty\infty}^{q+1}(X_{\infty\infty}, A_{\infty\infty};G)$, und man erklärt:

$$\delta_{\infty\infty}^*(h_{\infty\infty}^q) := \overline{\delta_{\infty\infty}(c_{\infty\infty}^q)}.$$

Es gilt: $\delta_{\infty\infty}^*$ und der Corandoperator $\check{\delta}^*$ aus (2.18) sind mit dem Isomorphismus π vertauschbar:

5.5 Lemma. Es herrscht Kommutativität im Diagramm

(5.20)
$$\begin{array}{ccc} \check{H}^q(A;G) & \xrightarrow{\check{\delta}^*} & \check{H}^{q+1}(X,A;G) \\ \downarrow \pi_A & & \downarrow \pi_X \\ H_{\infty\infty}^q(A_{\infty\infty};G) & \xrightarrow{\delta_{\infty\infty}^*} & H_{\infty\infty}^{q+1}(X_{\infty\infty}, A_{\infty\infty};G). \end{array}$$

Beweis: Für $h^q \in \check{H}^q(A;G)$ werde ein Repräsentant $h_\alpha^q \in H^q(A_\alpha;G)$ gewählt, dh. $h^q = [h_\alpha^q]$ und aus der Klasse h_α^q ein repräsentierender Cozyklus $z_\alpha^q \in Z^q(A_\alpha;G)$. Wir definieren ein $c_{\infty\infty}^q$ aus $C_{\infty\infty}^q(X_{\infty\infty};G)$ durch:

$$c_{\infty\infty}^q(s_{\infty\infty}^q) := \begin{cases} (z_\alpha^q \cdot p^\alpha)(s_{\infty\infty}^q) & \text{für } s_{\infty\infty}^q \in p^{\alpha-1}(A_\alpha); \\ 0 & \text{für } s_{\infty\infty}^q \in X_{\infty\infty} - p^{\alpha-1}(A_\alpha); \end{cases}$$

sowie ein $c_\alpha^q \in C^q(X_\alpha;G)$ durch:

$$c_\alpha^q(s_\alpha^q) := \begin{cases} z_\alpha^q(s_\alpha^q) & \text{für } s_\alpha^q \in A_\alpha; \\ 0 & \text{für } s_\alpha^q \in X_\alpha - A_\alpha. \end{cases}$$

Dann ist $\delta_\infty(c_\infty^q) \in Z_\infty^{q+1}(X_\infty, A_\infty; G)$ ein Repräsentant für $\delta_\infty^*(\overline{z_\alpha^q \cdot p^\alpha}) = \delta_\infty^*(\pi_A(h^q))$ in $H_\infty^{q+1}(X_\infty, A_\infty; G)$, das heißt:

$$(5.21) \qquad \delta_\infty^* \cdot \pi_A(h^q) = \delta_\infty^*(\overline{z_\alpha^q \cdot p^\alpha}) = \overline{\delta_\infty(c_\infty^q)};$$

andererseits ist $\delta_\alpha(c_\alpha^q) \in Z^{q+1}(X_\alpha, A_\alpha; G)$ ein Repräsentant für $\check{\delta}^*(h^q)$, das heißt $\check{\delta}^*(h^q) = \overline{[\delta_\alpha(c_\alpha^q)]}$ und somit:

$$(5.22) \qquad \pi_X \cdot \check{\delta}^*(h^q) = \pi_X\overline{[\delta_\alpha(c_\alpha^q)]} = \overline{(\delta_\alpha(c_\alpha^q)) \cdot p^\alpha}.$$

Wegen $c_\infty^q = c_\alpha^q \cdot p^\alpha$ folgt aus (5.21) und (5.22) unter Verwendung der Vertauschbarkeitsregel (5.5) in der Tat:

$$\pi_X \cdot \check{\delta}^* = \delta_\infty^* \cdot \pi_A.$$

Damit ist gezeigt:

π ist ein Isomorphismus der Čechschen Cohomologie $\check{H}^*$ des Paares (X,A) auf die Co(X)-reduzierte Cohomologie H_∞^* des simplizialen Paares (X_∞, A_∞).

LITERATUR

[1] S. EILENBERG - N. STEENROD
Foundations of Algebraic Topology,
Princeton, 1962.

[2] G. GOOS
Künnethformeln der Čechschen Cohomologie-
theorie über kompakten Räumen,
Dissertation, Erlangen 1965 (vervielfältigt).

[3] H.-J. KOWALSKY
Topologische Räume
Basel, 1961.

[4] G. NÖBELING
Zur Begründung der Čechschen Cohomologie-
theorie kompakter Räume,
Manuskript.

[5] H. SCHUBERT
Topologie,
Stuttgart, 1964.

[6] G. SIMMONS
Topology and Modern Analysis,
New York, 1963.

LEBENSLAUF

Am 17. Februar 1940 wurde ich als zweites Kind des Verwaltungs-Amtmanns Hans Weidner und seiner Ehefrau Emmi, geb. Hümmer, in Lichtenfels/Ofr. geboren.

Vom September 1946 bis Juli 1950 besuchte ich die Volksschule in Lichtenfels; anschließend trat ich in die Oberrealschule Lichtenfels ein und legte dort im Jahre 1959 die Reifeprüfung ab.

Im Wintersemester 1959/60 begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen. Mathematische Vorlesungen hörte ich bei den Herren: Professor Dr. H.-J. Kowalsky, Professor Dr. G. Nöbeling, Professor Dr. R. Remmert, Professor Dr. W. Specht. - Im Herbst 1964 legte ich in Erlangen die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen ab.

Im November 1964 wurde ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Erlangen; seit Oktober 1967 bin ich dort als wissenschaftlicher Assistent tätig.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990